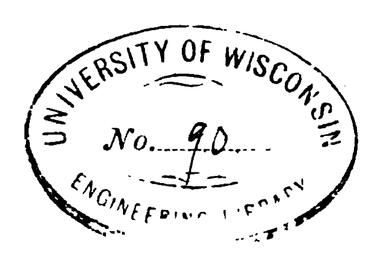
WENDT


igitized by Google


UNIVERSITY OF WISCONSIN
No. 90
ENGINEERING LIBRARY

à Monsieur Bouquet
membre de l'Institut
hommage de profond respect
H. Léauté

THÉORIE GÉNÉRALE

DES

TRANSMISSIONS PAR CABLES MÉTALLIQUES.

RÈGLES PRATIQUES.

L'Académie des Sciences, dans la séance du 7 novembre 1881, a voté l'insertion de ce Mémoire dans le *Recueil des Mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Académie*.



THÉORIE GÉNÉRALE

DES

TRANSMISSIONS

PAR CABLES MÉTALLIQUES

RÈGLES PRATIQUES

PAR M. H. LÉAUTÉ,

Docteur ès Sciences mathématiques, Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur de Mécanique à l'École Polytechnique,
Lauréat de l'Institut (prix Poncelet), Directeur des Études à l'École préparatoire Monge.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1882

THÉORIE GÉNÉRALE

DES

TRANSMISSIONS PAR CABLES MÉTALLIQUES.

RÈGLES PRATIQUES.

BUT DU TRAVAIL. — MÉTHODE SUIVIE. — DIVISIONS DE CE MÉMOIRE.

Les câbles métalliques (¹), destinés à transmettre le mouvement d'un arbre à un autre, lorsque la portée est trop forte pour permettre l'emploi des courroies, ont été imaginés en 1850 par M. Hirn; depuis lors ces transmissions sont entrées de plus en plus dans la pratique et elles ont acquis aujourd'hui une importance industrielle de premier ordre.

Différents travaux ont été publiés à leur sujet; il faut placer en première ligne les belles recherches de M. Resal (²), dirigées à un point de vue

(¹) Il est utile de rappeler ici la constitution d'un câble.

Un certain nombre de fils de fer sont enroulés les uns à côté des autres autour d'une âme en chanvre, de façon à la recouvrir complètement. On obtient ainsi un *toron*.

Plusieurs de ces torons, enroulés de la même manière autour d'une âme en chanvre plus forte, constituent le câble.

Le sens d'enroulement des torons est inverse de celui des fils.

Enfin, le câble est goudronné d'ordinaire, afin d'éviter la rouille et d'augmenter l'adhérence sur les poulies.

(²) Resal, *Traité de Mécanique générale*, t. I, p. 321 et suiv.; t. III, p. 271 et suiv.

exclusivement théorique, et sur lesquelles nous aurons occasion de revenir à de nombreuses reprises dans le cours de ce travail.

Mentionnons aussi les règles pratiques données par M. Reulaux [1], règles qui sont généralement adoptées, et que nous serons amené à modifier sur certains points et à compléter.

Citons enfin, parmi les travaux les plus importants relatifs à ces transmissions, les intéressants Mémoires de M. Achard [2], de M. Vigreux [3], et les Leçons de M. Callon [4] dans son Cours à l'École des Mines.

Mais les câbles télédynamiques n'ont pas été jusqu'ici l'objet d'une étude rationnelle, au point de vue pratique; les règles que l'on admet pour les établir sont, en réalité, tout à fait insuffisantes, et ne permettent pas d'obtenir dans tous les cas une transmission fonctionnant d'une manière satisfaisante.

On se contente, en effet, de déterminer la section du câble à employer et le nombre de fils qui doivent le former, par cette double condition que le glissement sur les poulies ne puisse se produire et que le câble soit capable, *à l'état statique,* de résister à la tension qu'il supporte [5] et l'on suppose, pour faire ce calcul, que la longueur de ce câble ne change pas et que la résistance à vaincre est constante.

Or, ces hypothèses s'écartent notablement de la réalité des faits, et cela pour plusieurs raisons :

Tout d'abord, les câbles sont animés d'une vitesse souvent considérable, qui atteint parfois 32^m par seconde, et peut même, dans certaines circonstances, arriver à 50^m; la force centrifuge qui en résulte est alors loin

---

(1) Reulaux, *Le Constructeur,* 2e édition française, publiée sur la 3e édition allemande, par M. Debize, p. 589 et suiv.

(2) Achard, *Annales des Mines,* 7e série, t. VI, VII et VIII (*De la transmission et de la distribution des forces motrices à grande distance,* 1876).

(3) Vigreux, *Annales du Génie civil,* mars, avril, mai 1876.

(4) Callon, *Cours de machines,* publié par M. Boutan, t. III, p. 280 et suiv.

(5) Afin de simplifier le discours, nous désignerons dans la suite sous le nom de *condition d'adhérence* et de *condition de résistance* les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que le câble en mouvement ne glisse pas et pour qu'il ne se rompe pas.

d'être négligeable, et il est nécessaire d'en tenir compte dans les conditions d'adhérence et de résistance.

En second lieu, ils ne conservent pas, d'un moment à l'autre, la même longueur, et s'ils s'allongent très peu sous l'influence d'une traction momentanée, ce qui permet, au point de vue théorique, de les regarder comme inextensibles sous le rapport de la résistance à la traction, ils sont, en revanche, très sensibles aux variations de température et surtout d'humidité.

D'un autre côté, s'ils n'ont pas été préalablement étirés, ils subissent, par l'emploi, des allongements relativement considérables, qui se contitinuent au fur et à mesure de leur service.

Enfin, l'effort à vaincre n'est jamais rigoureusement constant et ses variations acquièrent une grande importance depuis que, l'emploi des câbles s'étant généralisé, on leur a fait commander directement des appareils isolés.

Aussi les règles admises jusqu'ici pour l'établissement des transmissions télédynamiques sont-elles, dans certains cas, d'une application très défectueuse : c'est ce qui explique les mécomptes auxquels elles donnent souvent lieu dans la pratique.

Il est donc utile d'établir la théorie des câbles en tenant compte de leur mouvement propre, des changements de longueurs accidentels ou permanents qu'ils peuvent subir, et surtout des variations du travail résistant. C'est, en effet, un fait d'expérience qu'une transmission télédynamique, installée pour transmettre un effort donné, peut ne plus fonctionner du tout s'il se produit dans la résistance à vaincre des oscillations atteignant certaines limites.

Le problème à traiter consiste, en somme, à rechercher de quelle manière un câble s'enroulant sur deux poulies transmet le mouvement de l'une à l'autre dans le cas général d'une puissance et d'une résistance variables.

Pour le résoudre, il faut trouver, en fonction des éléments de la transmission, la relation qui existe entre les efforts qu'exerce un câble à ses deux extrémités et le déplacement relatif qu'elles peuvent éprouver.



Il est clair, en effet, que si cette relation est telle qu'un faible écartement relatif des extrémités du câble détermine un grand accroissement de tension, les variations de la résistance n'entraîneront qu'une différence très faible de vitesse pour les deux poulies, de sorte que, l'uniformité du mouvement en étant à peine altérée, la transmission, prise au point de vue cinématique, sera presque parfaite. Seulement, il se produira dans le mécanisme des efforts brusques qui pourront en fatiguer les diverses parties.

On voit donc que le rapport de l'accroissement de tension au déplacement relatif des extrémités joue un rôle capital, qu'il doit être maintenu entre certaines limites et qu'il peut être pris comme le *coefficient de régularité* de la transmission.

Le calcul de ce coefficient de régularité constitue la partie fondamentale de la théorie générale que nous allons exposer.

La définition que nous venons de donner de la régularité est identique à celle qu'a indiquée M. Kretz ([1]) dans le cas des courroies, mais les difficultés mathématiques auxquelles elle conduit sont ici beaucoup plus grandes. Pour les courroies, en effet, dont la masse est faible et dont la vitesse est en général peu considérable, il est permis de négliger les forces d'inertie; on obtient ainsi une très grande simplification, car les équations du mouvement sont alors des équations différentielles ordinaires. Pour les câbles, au contraire, on est obligé de tenir compte à la fois de la masse du lien et de son mouvement propre; les équations auxquelles on est conduit sont aux différences partielles et, de plus, le mouvement n'étant pas forcément plan, il s'introduit une variable de plus.

La méthode suivie dans ce travail est la suivante :

Nous examinons, en premier lieu, le cas du mouvement permanent, c'est-à-dire celui où, la puissance étant constamment égale à la résistance, les poulies ont la même vitesse.

C'est ensuite à ce mouvement idéal que nous rapportons le mouvement

---

([1]) Kretz, *Notes au Cours de Mécanique appliquée aux machines* de Poncelet, n° 46, Section II; n°s 61 et 63, Section III.

réel, de manière à mettre en évidence les variations de vitesse et de tension, éléments principaux à considérer.

Nous obtenons de la sorte les équations qui lient ces deux éléments et nous pouvons ainsi déterminer le coefficient de régularité.

Cette manière d'opérer nous conduit tout d'abord à étudier la forme prise par une corde inextensible en mouvement permanent, sous l'action de forces indépendantes du temps, et à montrer que cette forme est identique avec celle de l'équilibre au repos sous l'action des mêmes forces, ce qui constitue une généralisation d'un théorème dû à M. Resal (1). Elle nous amène ensuite à trouver les équations générales des petites oscillations de cette corde écartée de sa position de repos apparent (2), et à prouver que, dans le cas où la figure permanente est plane, ce qui est le cas des câbles, les oscillations perpendiculaires au plan de la corde n'altèrent pas les tensions. Elle nous permet enfin de calculer les tensions moyennes développées aux extrémités d'une transmission télédynamique par un déplacement relatif des poulies et de montrer que le coefficient de régularité est proportionnel au poids du câble, à la portée et à la somme des inverses des cubes des deux flèches.

Ces résultats une fois établis et l'importance de la considération des flèches mise ainsi en lumière, nous remarquons que, s'il y a intérêt, au point de vue de la régularité, à diminuer les flèches, il est nécessaire cependant de ne pas les réduire outre mesure, d'une part afin d'éviter que, cette régularité étant trop grande, les variations du travail résistant ne donnent lieu à des secousses trop brusques et, d'autre part, afin que, sous l'influence des raccourcissements accidentels que peut subir le câble, il ne se produise pas des efforts dangereux pour le mécanisme.

Nous déterminons alors, en nous appuyant sur les résultats de l'expérience, les limites entre lesquelles il convient de maintenir la flèche relative au repos pour éviter ces divers inconvénients (3). Ces limites, une fois

(1) Resal, *Traité de Mécanique générale*, t. III, p. 271.

(2) Nous entendons par *position de repos apparent* celle qui correspond au mouvement permanent.

(3) Dans des machines de même espèce, les variations d'efforts sont d'ordinaire proportionnelles

fixées, nous permettent de calculer un câble convenable dans un cas quelconque.

Nous arrivons ainsi à former des Tableaux numériques fournissant, selon la valeur de la portée et du travail à transmettre, le poids du câble par mètre courant, le diamètre des fils qui le forment, celui des poulies à employer, Tableaux dans lesquels il a été tenu compte à la fois de tous les éléments du problème, c'est-à-dire : 1° des conditions de résistance et d'adhérence, ainsi que du mouvement propre du câble qui les modifie; 2° de la régularité relative ou coefficient de fonctionnement que l'on veut atteindre; 3° des variations de longueur accidentelles ou permanentes auxquelles le câble est exposé.

Ce travail est divisé en trois Parties : la première contient la théorie générale; la deuxième, les conséquences pratiques qui en découlent; la troisième, les règles d'établissement des transmissions télédynamiques.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE GÉNÉRALE.

I. — Rappel des équations générales du mouvement d'une corde dans l'espace.

Nous rappellerons tout d'abord comment peuvent être obtenues les équations générales du mouvement d'une corde dans l'espace.

Soient

AB une corde en mouvement;

à la grandeur de ces efforts; ce qu'il importe de considérer dans une transmission, c'est donc moins le coefficient de régularité absolue que son rapport à l'effort exercé. Nous désignons ce rapport sous le nom de *coefficient de fonctionnement*. C'est ce coefficient qu'il sera nécessaire de maintenir entre certaines limites, variables du reste suivant la machine employée et la nature du travail effectué.

x, y, z les coordonnées de l'un de ses points par rapport à trois axes rectangulaires quelconques;

s la longueur d'arc comptée à partir d'un certain point origine, pris sur la corde;

X, Y, Z les composantes de l'accélération due à la force extérieure, composantes qui sont fonctions de x, y, z et du temps t;

μ la masse de la corde par unité de longueur;

μT la tension au point considéré.

Les équations du mouvement s'obtiennent, d'après le théorème de d'Alembert, en écrivant, pour l'élément quelconque ab égal à ds, l'équilibre des forces d'inertie et des forces réellement appliquées, qui sont les forces extérieures et les tensions.

Or la projection sur OX de la force d'inertie, correspondant à ds, est $\mu\,ds\,\frac{d^2x}{dt^2}$, celle de la force extérieure est $\mu\,ds\,X$, celles des tensions sont $\mu T\frac{dx}{ds} - d\left(\mu T\frac{dx}{ds}\right)$ et $-\mu T\frac{dx}{ds}$; on a donc, en somme, en projetant sur les trois axes, les trois équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right),\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right),\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right),\end{aligned}\right.$$

auxquelles il faut ajouter la condition

$$(2)\qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

qui exprime que la corde est inextensible.

Les quatre équations aux dérivées partielles qui précèdent déterminent x, y, z, T en fonction du temps et de l'arc s; elles font donc connaître le mouvement de la corde et la tension en chacun de ses points.

II. — Équations du mouvement permanent d'une corde inextensible. Première méthode.

Parmi tous les mouvements en nombre infini que peut prendre une corde, il en est un particulièrement simple, celui où la figure affectée par la corde est permanente. Ce cas, qui par lui-même présente quelque intérêt, puisqu'il correspond à une transmission fonctionnant d'une manière parfaite, doit être traité tout d'abord; c'est, en effet, en prenant pour position moyenne cette figure permanente du câble que nous pourrons étudier les petits mouvements qui peuvent avoir lieu de part et d'autre et qui, habituellement dus, dans la pratique, aux variations de l'effort transmis, produisent l'irrégularité du mouvement et ont pour conséquence des oscillations dangereuses. L'étude de ces petits mouvements nous conduira à la détermination des conditions à satisfaire pour les limiter et assurer ainsi le bon fonctionnement de la transmission.

La figure permanente dont il s'agit se détermine aisément.

En effet, il est nécessaire et suffisant pour que cette figure se réalise que la vitesse V de chaque point soit, à chaque instant, dirigée suivant la tangente à la corde en ce point. Or les composantes de la vitesse étant $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, et les cosinus directeurs de la tangente $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, on a pour condition

$$(3) \qquad \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{ds}\right)} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dy}{ds}\right)} = \frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)}{\left(\frac{dz}{ds}\right)} = \mathrm{V};$$

mais, si l'on dérive par rapport au temps l'équation d'inextensibilité, qui est satisfaite à chaque instant,

$$(2) \qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

on obtient

$$(4) \qquad \frac{dx}{ds}\frac{d^2 x}{ds\,dt} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2 y}{ds\,dt} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2 z}{ds\,dt} = 0.$$

Si l'on dérive maintenant par rapport à l'arc les équations (3), qui sont applicables en tous les points de la corde, on a

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds\,dt} &= V\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dV}{ds}\frac{dx}{ds},\\ \frac{d^2y}{ds\,dt} &= V\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dV}{ds}\frac{dy}{ds},\\ \frac{d^2z}{ds\,dt} &= V\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{dV}{ds}\frac{dz}{ds};\end{aligned}\right.$$

en portant ces valeurs dans l'équation (4), on trouve

$$V\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right) + \frac{dV}{ds}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right] = 0,$$

équation qui se réduit à

$$(6)\qquad \frac{dV}{ds} = 0,$$

car le coefficient de $\frac{dV}{ds}$ est égal à l'unité et celui de V est nul, puisque c'est la dérivée par rapport à l'arc du premier membre de l'équation (2).

Ainsi, lorsque la figure de la corde est permanente, la vitesse est la même en tous les points, ce qui d'ailleurs était évident *a priori*.

Ceci posé, cherchons ce que deviennent les équations du mouvement (§ I)

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right),\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right),\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right),\end{aligned}\right.$$

lorsqu'on tient compte de l'équation (6).

Pour cela, calculons les quantités $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, en dérivant par rapport à t les équations (3), qui sont applicables à tout instant; nous avons

ainsi

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = V\dfrac{d^2x}{ds\,dt} + \dfrac{dV}{dt}\dfrac{dx}{ds}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = V\dfrac{d^2y}{ds\,dt} + \dfrac{dV}{dt}\dfrac{dy}{ds}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = V\dfrac{d^2z}{ds\,dt} + \dfrac{dV}{dt}\dfrac{dz}{ds}; \end{cases}$$

mais, d'après les relations (5), qui deviennent alors, puisque $\frac{dV}{ds}$ est nul,

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{ds\,dt} = V\dfrac{d^2x}{ds^2}, \\ \dfrac{d^2y}{ds\,dt} = V\dfrac{d^2y}{ds^2}, \\ \dfrac{d^2z}{ds\,dt} = V\dfrac{d^2z}{ds^2}, \end{cases}$$

les équations (7) peuvent s'écrire

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = V^2\dfrac{d^2x}{ds^2} + \dfrac{dV}{dt}\dfrac{dx}{ds}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = V^2\dfrac{d^2y}{ds^2} + \dfrac{dV}{dt}\dfrac{dy}{ds}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = V^2\dfrac{d^2z}{ds^2} + \dfrac{dV}{dt}\dfrac{dz}{ds}. \end{cases}$$

Portons ces valeurs dans les équations (1), nous aurons

$$(10)\qquad \begin{cases} V^2\dfrac{d^2x}{ds^2} + \dfrac{dV}{dt}\dfrac{dx}{ds} = X + \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dx}{ds}\right), \\ V^2\dfrac{d^2y}{ds^2} + \dfrac{dV}{dt}\dfrac{dy}{ds} = Y + \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dy}{ds}\right), \\ V^2\dfrac{d^2z}{ds^2} + \dfrac{dV}{dt}\dfrac{dz}{ds} = Z + \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dz}{ds}\right). \end{cases}$$

Si nous multiplions ces équations respectivement par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ et que

nous les ajoutions, nous obtiendrons, toutes réductions faites,

$$(11) \qquad \frac{dV}{dt} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} + \frac{dT}{ds};$$

quant aux équations (10), qui sont les équations du mouvement, elles peuvent s'écrire, puisque $\frac{dV}{ds}$ est nul,

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{ds}\left[(T - V^2)\frac{dx}{ds}\right] + X - \frac{dV}{dt}\frac{dx}{ds} = 0, \\ &\frac{d}{ds}\left[(T - V^2)\frac{dy}{ds}\right] + Y - \frac{dV}{dt}\frac{dy}{ds} = 0, \\ &\frac{d}{ds}\left[(T - V^2)\frac{dz}{ds}\right] + Z - \frac{dV}{dt}\frac{dz}{ds} = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous reviendrons plus loin sur ces équations du mouvement permanent, car elles nous conduiront à des conséquences importantes; mais nous allons tout d'abord indiquer une seconde méthode pour les obtenir, méthode qui aura l'avantage de nous conduire à un changement de variables dont nous aurons besoin dans le cours de la théorie.

III. — Équations du mouvement permanent. — Deuxième méthode.

Ainsi que nous l'avons dit plus haut, il est clair, *a priori,* que dans le cas où la corde conserve une figure permanente, la vitesse V est, à un instant quelconque, la même en tous les points : nous l'avons d'ailleurs démontré au début du paragraphe précédent.

Ceci étant admis, si l'on considère les équations qui expriment la permanence de la figure occupée par la corde,

$$(3) \qquad \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{ds}\right)} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dy}{ds}\right)} = \frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)}{\left(\frac{dz}{ds}\right)} = V,$$

leurs intégrales générales, puisque V est une fonction de t seulement, sont

de la forme

$$x = f_1(s + \int V dt),$$
$$y = f_2(s + \int V dt),$$
$$z = f_3(s + \int V dt),$$

f_1, f_2, f_3 étant des fonctions arbitraires ([1]).

Ces équations intégrales constituent donc la condition nécessaire et suffisante pour la permanence du mouvement, ou, si l'on veut, il faut et il suffit pour cette permanence que x, y et z soient des fonctions de $s + \int dt$ seul.

Prenons alors pour variables indépendantes le temps t et

$$s + \int V dt = \sigma,$$

au lieu de t et s.

Si l'on distingue par une parenthèse les dérivées partielles prises par rapport à ses anciennes variables, on aura, pour une fonction quelconque φ

([1]) On sait, en effet, que l'intégrale générale de l'équation aux différences partielles

$$P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dx}{dt} = R,$$

où P, Q, R sont des fonctions de x, s et t, est donnée par

$$u = f(v),$$

f étant une fonction arbitraire et $u =$ const., $v =$ const. les deux intégrales des équations différentielles ordinaires simultanées

$$\frac{ds}{P} = \frac{dt}{Q} = \frac{dx}{R};$$

or, dans le cas actuel, ces deux équations sont

$$\frac{ds}{V} = -\frac{dt}{1}$$

et

$$dx = 0,$$

dont les intégrales sont

$$s + \int V dt = \text{const.},$$
$$x = \text{const.}$$

L'intégrale cherchée est donc

$$x = f(s + \int V dt .$$

de s et de t,

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) = \frac{d\varphi}{d\sigma},$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d\varphi}{d\sigma}\mathrm{V} + \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) = \frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}\mathrm{V}^2 + 2\frac{d^2\varphi}{d\sigma\,dt}\mathrm{V} + \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{d\sigma}\frac{d\mathrm{V}}{dt},$$

$$\left(\frac{d^2\varphi}{ds^2}\right) = \frac{d^2\varphi}{d\sigma^2},$$

$$\left(\frac{d^2\varphi}{ds\,dt}\right) = \frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}\mathrm{V} + \frac{d^2\varphi}{d\sigma\,dt}.$$

Les équations du mouvement (§ I) deviennent alors

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{d\sigma^2}\mathrm{V}^2 + 2\dfrac{d^2x}{d\sigma\,dt}\mathrm{V} + \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{d\sigma}\dfrac{d\mathrm{V}}{dt} = \mathrm{X} + \dfrac{d}{d\sigma}\left(\mathrm{T}\dfrac{dx}{d\sigma}\right), \\ \dfrac{d^2y}{d\sigma^2}\mathrm{V}^2 + 2\dfrac{d^2y}{d\sigma\,dt}\mathrm{V} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{d\sigma}\dfrac{d\mathrm{V}}{dt} = \mathrm{Y} + \dfrac{d}{d\sigma}\left(\mathrm{T}\dfrac{dy}{d\sigma}\right), \\ \dfrac{d^2z}{d\sigma^2}\mathrm{V}^2 + 2\dfrac{d^2z}{d\sigma\,dt}\mathrm{V} + \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{dz}{d\sigma}\dfrac{d\mathrm{V}}{dt} = \mathrm{Z} + \dfrac{d}{d\sigma}\left(\mathrm{T}\dfrac{dz}{d\sigma}\right), \end{cases}$$

et l'équation d'inextensibilité

$$(14)\quad \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\sigma}\right)^2 = 1.$$

Exprimons maintenant que la figure de la corde est permanente, c'est-à-dire que x, y, z sont des fonctions de σ seulement; les dérivées de x, y, z par rapport à t sont alors nulles et les équations (13) se réduisent à

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{d\sigma^2}\mathrm{V}^2 + \dfrac{dx}{d\sigma}\dfrac{d\mathrm{V}}{dt} = \mathrm{X} + \dfrac{d}{d\sigma}\left(\mathrm{T}\dfrac{dx}{d\sigma}\right), \\ \dfrac{d^2y}{d\sigma^2}\mathrm{V}^2 + \dfrac{dy}{d\sigma}\dfrac{d\mathrm{V}}{dt} = \mathrm{Y} + \dfrac{d}{d\sigma}\left(\mathrm{T}\dfrac{dy}{d\sigma}\right), \\ \dfrac{d^2z}{d\sigma^2}\mathrm{V}^2 + \dfrac{dz}{d\sigma}\dfrac{d\mathrm{V}}{dt} = \mathrm{Z} + \dfrac{d}{d\sigma}\left(\mathrm{T}\dfrac{dz}{d\sigma}\right), \end{cases}$$

équations qui sont identiques à celles que nous avons obtenues au paragraphe précédent.

IV. — Conséquences des équations du mouvement permanent; théorèmes sur la figure permanente dans le cas de forces indépendantes du temps.

Les équations (15), qui représentent, ainsi que nous venons de le démontrer, les équations du mouvement dans le cas de la figure permanente, ont été établies sans aucun choix particulier pour la direction des axes coordonnés; il nous est donc permis de prendre pour ces axes la tangente à la figure de la corde, la normale principale et la perpendiculaire à ces deux droites, ces trois axes étant menés par le point (x, y, z) considéré.

Nous aurons alors

$$\frac{dx}{d\sigma} = 1,$$
$$\frac{d^2x}{d\sigma^2} = 0,$$

si l'axe des x est dirigé suivant la tangente;

$$\frac{dy}{d\sigma} = 0,$$
$$\frac{d^2y}{d\sigma^2} = \frac{1}{\rho},$$

si l'axe des y est pris suivant la normale principale et si ρ représente le rayon de courbure au point (x, y, z) de la figure permanente;

$$\frac{dz}{d\sigma} = 0,$$
$$\frac{d^2z}{d\sigma^2} = 0,$$

l'axe des z étant placé suivant la binormale.

Les trois équations (15) se réduisent alors à deux, qui peuvent s'écrire, en représentant par F_t et F_n les composantes suivant la tangente et la normale principale de l'accélération due à la force extérieure,

$$(16) \qquad \frac{dV}{dt} = F_t + \frac{dT}{d\sigma},$$

$$(17) \qquad \frac{V^2}{\rho} = F_n + \frac{T}{\rho}.$$

Supposons maintenant que les forces extérieures soient *indépendantes du temps;* F_t et F_n ne contiennent pas t; d'un autre côté, V ne contient pas σ, puisque la figure est permanente; si donc on dérive l'équation (17) par rapport à σ, l'on a

(18) $$\frac{d.\rho F_n}{d\sigma} = \frac{dT}{d\sigma},$$

et, le premier membre ne dépendant que de σ, la quantité $\frac{dT}{d\sigma}$ est indépendante de t.

Mais alors, d'après l'équation (16), la quantité $\frac{dV}{dt}$ est, elle aussi, indépendante de t, et, comme elle est déjà indépendante de σ, on en conclut qu'elle est constante et l'on en déduit

$$V = kt + k',$$

k et k' étant des coefficients numériques.

Si nous portons cette valeur dans l'équation (16), nous obtenons

$$\frac{dT}{d\sigma} = k - F_t$$

et, par suite,

$$T = k\sigma - \int F_t d\sigma,$$

ce qui nous donne ce théorème :

Lorsqu'une corde inextensible en mouvement dans l'espace, sous l'action de forces indépendantes du temps, conserve une figure permanente, la tension en chaque point [1] *est indépendante du temps, mais varie d'un point à un autre.*

Ce théorème étant établi, portons la valeur de T dans l'équation (17). Le second membre ne dépend que de σ; V est donc indépendant de t, c'est-à-dire que le coefficient k est nul.

On a, par suite, ce théorème :

Lorsqu'une corde inextensible en mouvement dans l'espace, sous l'ac-

---

[1] Il est bien entendu, d'après la démonstration même, qu'il s'agit d'un point de la corde correspondant à un point fixe de l'espace, et non d'un point marqué sur elle et entraîné dans son mouvement,

tion de forces indépendantes du temps, conserve une figure permanente, la vitesse commune à tous les points est indépendante du temps.

Revenons maintenant aux équations (15), qui représentent les équations du mouvement permanent quand la direction des axes reste fixe, ou, si l'on veut, aux équations (12), dans lesquelles l'origine elle-même est immobile. Ces équations, si l'on exprime que V est constante, deviennent

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{ds}\left[(T-V^2)\dfrac{dx}{ds}\right]+X=0,\\ \dfrac{d}{ds}\left[(T-V^2)\dfrac{dy}{ds}\right]+Y=0,\\ \dfrac{d}{ds}\left[(T-V^2)\dfrac{dz}{ds}\right]+Z=0. \end{cases}$$

Ces équations sont identiques (sauf le changement de T en $T-V^2$) avec celles qui représentent les conditions d'équilibre de la corde sous l'action des forces X, Y, Z.

Or, pour avoir l'équation de la figure permanente, il faut éliminer $T-V^2$ entre les trois équations (19); les deux équations résultantes seront donc identiques avec celles donnant la forme d'équilibre au repos.

On a ainsi le théorème suivant :

Lorsqu'une corde inextensible en mouvement dans l'espace, sous l'action de forces indépendantes du temps, conserve une figure permanente, la forme qu'elle prend est la même que la forme d'équilibre au repos sous l'action des mêmes forces et ne dépend pas, par suite, de la grandeur de la vitesse d'entraînement.

Dans le cas particulier des transmissions télédynamiques, ce théorème est applicable, puisque la seule force extérieure est la pesanteur; la forme de chacun des deux brins du câble est donc une chaînette dont le paramètre est indépendant de la vitesse. Ce cas spécial du théorème général que nous venons d'énoncer avait été démontré directement par M. Resal ([1]).

([1]) Resal, *Traité de Mécanique générale*, t. III, p. 271.

L'étude complète que nous nous proposions de faire tout d'abord de la figure prise par une corde inextensible en mouvement permanent est terminée; nous connaissons les propriétés de ce mouvement permanent et nous en avons les équations. Il nous faut maintenant, dans l'ordre d'idées que nous avons exposées au début de ce travail, étudier les modifications qu'éprouve l'état de la corde, lorsqu'on l'écarte de la position du repos apparent qu'elle occupait [1].

V. — Équations des petites oscillations d'une corde autour de sa position de repos apparent. — Axes rectangulaires quelconques, mais fixes dans l'espace.

Considérons une corde en état de repos apparent animée d'une vitesse V, et soient toujours x, y, z, T les coordonnées d'un point quelconque de cette corde et la tension en ce point, par rapport à des axes rectangulaires quelconques, mais fixes dans l'espace.

Si l'on écarte la corde de sa position de repos apparent, les coordonnées du point x, y, z deviennent, à l'instant t considéré, $x + x_1$, $y + y_1$, $z + z_1$, et la tension $T + T_1$.

On aura les équations du mouvement en substituant ces dernières quantités à x, y, z, T, dans les équations (1). Si donc on représente par X_1, Y_1, Z_1 les accroissements qu'éprouvent les forces X, Y, Z, lorsque le point x, y, z vient en $x + x_1$, $y + y_1$, $z + z_1$, on a

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2(x+x_1)}{dt^2} &= X + X_1 + \frac{d}{ds}\left[(T+T_1)\frac{d(x+x_1)}{ds}\right],\\ \frac{d^2(y+y_1)}{dt^2} &= Y + Y_1 + \frac{d}{ds}\left[(T+T_1)\frac{d(y+y_1)}{ds}\right],\\ \frac{d^2(z+z_1)}{dt^2} &= Z + Z_1 + \frac{d}{ds}\left[(T+T_1)\frac{d(z+z_1)}{ds}\right],\end{aligned}\right.$$

$$(21)\quad \left[\frac{d(x+x_1)}{ds}\right]^2 + \left[\frac{d(y+y_1)}{ds}\right]^2 + \left[\frac{d(z+z_1)}{ds}\right]^2 = 1,$$

---

[1] Nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que les forces extérieures sont indépendante du temps, hypothèse évidemment réalisée dans le cas des transmissions télédynamiques.

avec les conditions

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right),$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = Y + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right),$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = Z + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right),$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1;$$

les équations (20) et (21) se réduisent alors à

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 + \dfrac{dT}{ds}\dfrac{dx_1}{ds} + T\dfrac{d^2x_1}{ds^2} + \dfrac{dT_1}{ds}\dfrac{dx}{ds} + T_1\dfrac{d^2x}{ds^2} + \dfrac{dT_1}{ds}\dfrac{dx_1}{ds} + T_1\dfrac{d^2x_1}{ds^2}, \\ \dfrac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1 + \dfrac{dT}{ds}\dfrac{dy_1}{ds} + T\dfrac{d^2y_1}{ds^2} + \dfrac{dT_1}{ds}\dfrac{dy}{ds} + T_1\dfrac{d^2y}{ds^2} + \dfrac{dT_1}{ds}\dfrac{dy_1}{ds} + T_1\dfrac{d^2y_1}{ds^2}, \\ \dfrac{d^2z_1}{dt^2} = Z_1 + \dfrac{dT}{ds}\dfrac{dz_1}{ds} + T\dfrac{d^2z_1}{ds^2} + \dfrac{dT_1}{ds}\dfrac{dz}{ds} + T_1\dfrac{d^2z}{ds^2} + \dfrac{dT_1}{ds}\dfrac{dz_1}{ds} + T_1\dfrac{d^2z_1}{ds^2}, \end{cases}$$

$$(23)\quad \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2 + 2\left(\frac{dx\,dx_1}{ds^2} + \frac{dy\,dy_1}{ds^2} + \frac{dz\,dz_1}{ds^2}\right) = 0.$$

Nous n'avons jusqu'ici fait aucune hypothèse sur l'amplitude des oscillations qu'effectue la corde autour de sa position de repos apparent et les équations (22) et (23) sont vraies, quelles que soient les valeurs des quantités x_1, y_1, z_1, T_1; nous allons maintenant exprimer que ces valeurs sont assez petites pour qu'il soit permis de négliger les termes du second ordre par rapport à elles ou à leurs dérivées. Dans ces conditions, les équations (22) et (23) deviennent

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 + \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dx_1}{ds} + T_1\dfrac{dx}{ds}\right), \\ \dfrac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1 + \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dy_1}{ds} + T_1\dfrac{dy}{ds}\right), \\ \dfrac{d^2z_1}{dt^2} = Z_1 + \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dz_1}{ds} + T_1\dfrac{dz}{ds}\right), \end{cases}$$

$$(25)\quad \frac{dx}{ds}\frac{dx_1}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{dy_1}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{dz_1}{ds} = 0.$$

Les quantités X_1, Y_1, Z_1 peuvent être remplacées, au degré d'approximation que nous avons admis, par des fonctions linéaires de x_1, y_1, z_1; par conséquent, les équations précédentes sont linéaires, mais à coefficients variables. On sait d'ailleurs, par ce qui a été démontré au § III, que ces coefficients sont simplement fonctions de $s + Vt$: il est donc naturel d'opérer le changement de variables que nous avons employé plus haut et de prendre pour variable indépendante la quantité $s + Vt$.

VI. — Équations des petites oscillations. — Axes rectangulaires de directions quelconques mais fixes, origine parcourant la courbe de repos apparent avec la vitesse constante V de la corde.

Posons, comme nous l'avons déjà fait,

$$s + Vt = \sigma.$$

Les quantités x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées d'un point de la corde par rapport à des axes animés d'un mouvement de translation et dont l'origine parcourt la courbe d'équilibre apparent avec la vitesse constante V; la quantité σ détermine un point de la corde qui, dans l'état permanent, occupe toujours la même position dans l'espace ([1]).

([1]) Il peut n'être pas inutile d'insister ici sur la signification du changement de variables que nous opérons.

D'après la définition que nous avons donnée pour x_1, y_1, z_1, ces quantités sont les coordonnées d'un point de la corde qui se trouverait en x, y, z à l'instant considéré, si le mouvement était permanent, ces coordonnées ayant d'ailleurs pour origine le point (x, y, z) lui-même.

Il résulte de là que x_1, y_1, z_1 dépendent à la fois du moment choisi et du point (x, y, z) visé, c'est-à-dire sont fonctions de t et de s. Ceci posé, considérons des axes rectangulaires de directions fixes dont l'origine O parcourt la courbe de repos apparent avec la même vitesse constante V. Si nous laissons s constant lorsque t varie, nous exprimons ainsi que le point (x, y, z) est un point marqué de la corde, entraîné par elle dans son mouvement. Se donner s, c'est donc définir un point matériel de la corde; par suite, prendre s pour variable, c'est définir x_1, y_1, z_1 comme les coordonnées d'un même point matériel de la corde par rapport à des axes qui se déplacent le long de la courbe de repos apparent avec la vitesse V.

Supposons maintenant qu'au lieu de rapporter le point (x_1, y_1, z_1) à un point (x, y, z) marqué sur la corde et entraîné par elle, nous voulions prendre pour ce point (x, y, z) un point fixe de l'espace. Il est clair alors que la distance de ce point à l'origine mobile O, étant s à l'instant t, était $s + Vt$

Les formules de transformation sont, comme nous l'avons vu § III,

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)=\frac{dx}{d\sigma},$$

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)=\frac{dx_1}{d\sigma},$$

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)=\frac{d^2x}{d\sigma^2},$$

$$\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)=\frac{d^2x_1}{d\sigma^2},$$

$$\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)=\frac{d^2x_1}{d\sigma^2}V^2+2\frac{d^2x_1}{d\sigma\,dt}V+\frac{d^2x_1}{dt^2},$$

et les équations (24) et (25) deviennent

$$(26)\quad\begin{cases}\dfrac{d^2x_1}{d\sigma^2}V^2+2\dfrac{d^2x_1}{d\sigma\,dt}V+\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=X_1+\dfrac{dT}{d\sigma}\dfrac{dx_1}{d\sigma}+T\dfrac{d^2x_1}{d\sigma^2}+\dfrac{dT_1}{d\sigma}\dfrac{dx}{d\sigma}+T_1\dfrac{d^2x}{d\sigma^2},\\[2ex] \dfrac{d^2y_1}{d\sigma^2}V^2+2\dfrac{d^2y_1}{d\sigma\,dt}V+\dfrac{d^2y_1}{dt^2}=Y_1+\dfrac{dT}{d\sigma}\dfrac{dy_1}{d\sigma}+T\dfrac{d^2y_1}{d\sigma^2}+\dfrac{dT_1}{d\sigma}\dfrac{dy}{d\sigma}+T_1\dfrac{d^2y}{d\sigma^2},\\[2ex] \dfrac{d^2z_1}{d\sigma^2}V^2+2\dfrac{d^2z_1}{d\sigma\,dt}V+\dfrac{d^2z_1}{dt^2}=Z_1+\dfrac{dT}{d\sigma}\dfrac{dz_1}{d\sigma}+T\dfrac{d^2z_1}{d\sigma^2}+\dfrac{dT_1}{d\sigma}\dfrac{dz}{d\sigma}+T_1\dfrac{d^2z}{d\sigma^2},\end{cases}$$

$$(27)\qquad \frac{dx}{d\sigma}\frac{dx_1}{d\sigma}+\frac{dy}{d\sigma}\frac{dy_1}{d\sigma}+\frac{dz}{d\sigma}\frac{dz_1}{d\sigma}=0,$$

qui peuvent s'écrire, si l'on pose $T-V^2=\varpi$,

$$(28)\quad\begin{cases}\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=X_1+\dfrac{d}{d\sigma}\left(\varpi\dfrac{dx_1}{d\sigma}+T_1\dfrac{dx}{d\sigma}\right)-2V\dfrac{d^2x_1}{d\sigma\,dt},\\[2ex] \dfrac{d^2y_1}{dt^2}=Y_1+\dfrac{d}{d\sigma}\left(\varpi\dfrac{dy_1}{d\sigma}+T_1\dfrac{dy}{d\sigma}\right)-2V\dfrac{d^2y_1}{d\sigma\,dt},\\[2ex] \dfrac{d^2z_1}{dt^2}=Z_1+\dfrac{d}{d\sigma}\left(\varpi\dfrac{dz_1}{d\sigma}+T_1\dfrac{dz}{d\sigma}\right)-2V\dfrac{d^2z_1}{d\sigma\,dt},\end{cases}$$

$$(27)\qquad \frac{dx}{d\sigma}\frac{dx_1}{d\sigma}+\frac{dy}{d\sigma}\frac{dy_1}{d\sigma}+\frac{dz}{d\sigma}\frac{dz_1}{d\sigma}=0.$$

à l'origine du temps. Pour que (x, y, z) représente, quand le temps varie, un point géométrique de la corde fixe dans l'espace, il faut donc que $s+Vt$ soit constant. Se donner $s+Vt$, ou σ, c'est en conséquence déterminer, comme nous l'avons dit dans le texte, un point de la corde qui, dans l'état permanent, occupe toujours la même position dans l'espace.

Nous remarquerons d'ailleurs que, d'après ce qui précède, σ est la distance, comptée sur la figure de repos apparent, du point (x, y, z) au point de l'espace où se trouvait le point matériel de la corde, originaire de s, à l'origine du temps.

Telles sont les équations des petites oscillations avec le système d'axes que nous avons choisi; nous allons maintenant opérer un nouveau changement de coordonnées [1], que nous avons déjà employé au § IV, et, tout en gardant la même origine, faire varier la direction des axes avec le temps.

VII. — ÉQUATIONS DES PETITES OSCILLATIONS. — AXES RECTANGULAIRES DIRIGÉS SUIVANT LA TANGENTE, LA NORMALE PRINCIPALE ET LA BINORMALE A LA COURBE DE REPOS APPARENT.

Nous choisirons pour nouveaux axes la tangente, la normale principale et la binormale à la courbe de repos apparent au point considéré, c'est-à-dire que nous remplacerons les axes correspondant à x_1, y_1, z_1 par d'autres dont les inclinaisons varient à chaque instant, de manière à coïncider avec les trois directions dont il vient d'être question.

Le nouveau système de coordonnées est donc variable à la fois avec le point que l'on considère et avec l'instant dont il s'agit; toutefois, sa position ne dépend que de celle qu'occuperait le point matériel, à l'instant choisi, sur la courbe de repos apparent dans le mouvement permanent, c'est-à-dire que de σ.

Afin de simplifier un peu le calcul nécessité par ce changement d'axes, nous remarquerons que, les directions des anciennes coordonnées étant complètement indépendantes de celles des nouvelles, il nous est permis, pour obtenir les formules définitives, de supposer les premières coordonnées parallèles aux nouvelles à l'instant considéré et pour le point que l'on envisage spécialement [2].

---

[1] Nous aurions pu éviter la transformation intermédiaire que nous venons d'employer, dans laquelle l'origine seule a été rendue mobile, et passer immédiatement du premier système d'axes au troisième. Mais les calculs très longs que nécessitent ces changements d'axes seraient devenus alors d'une complication telle, qu'il nous a paru préférable, au point de vue de la clarté, de scinder en deux cette opération.

[2] En supposant les deux systèmes d'axes parallèles, les équations auxquelles nous parviendrons seront relatives au point de l'espace pris pour origine; mais, comme ces équations ne conserveront aucune trace de cette origine particulière, elles s'appliqueront à tous les autres points et seront ainsi générales.



Soient α, β, γ les nouvelles coordonnées, α étant dirigé suivant la tangente, β suivant la binormale et γ suivant la normale principale; si l'on désigne les angles qu'elles forment avec les anciennes de la façon suivante :

	x.	y.	z.
α............	λ	μ	ν
β............	λ'	μ'	ν'
γ............	λ''	μ''	ν''

et si l'on représente par ρ et r les rayons de première et de seconde courbure (¹) de la courbe de repos apparent, on a, dans le cas général (²),

(29) $$\frac{d\cos\lambda}{d\sigma} = \frac{\cos\lambda''}{\rho},$$

(30) $$\frac{d\cos\lambda'}{d\sigma} = \frac{\cos\lambda''}{r},$$

(31) $$\frac{d\cos\lambda''}{d\sigma} = -\frac{\cos\lambda}{\rho} - \frac{\cos\lambda'}{r}.$$

(32) $$\frac{d^2\cos\lambda}{d\sigma^2} = -\frac{\cos\lambda}{\rho^2} - \frac{\cos\lambda'}{r\rho} + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\lambda''}{\rho}\right),$$

(33) $$\frac{d^2\cos\lambda'}{d\sigma^2} = -\frac{\cos\lambda}{r\rho} - \frac{\cos\lambda'}{r^2} + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\lambda''}{r}\right),$$

(34) $$\frac{d^2\cos\lambda''}{d\sigma^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\cos\lambda}{\rho}\right) - \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\lambda'}{r}\right) - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right)\cos\lambda''.$$

Dans le cas particulier où les deux systèmes d'axes sont parallèles, on

(¹) Nous rappelons que le rayon de seconde courbure ou de torsion d'une courbe gauche est défini par la relation

$$r = \frac{ds}{da},$$

da étant l'angle infiniment petit des deux plans osculateurs aux extrémités de l'axe ds.

(²) Les formules qui suivent sont dues à M. Serret. *Voir*, à ce sujet, le Mémoire de M. Brisse intitulé *Exposition analytique de la théorie des surfaces* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 2ᵉ série, t. III, p. 104; 1874).

trouve

$$\cos\lambda = 1, \quad \cos\mu = 0, \quad \cos\nu = 0,$$
$$\cos\lambda' = 0, \quad \cos\mu' = 1, \quad \cos\nu' = 0,$$
$$\cos\lambda'' = 0, \quad \cos\mu'' = 0, \quad \cos\nu'' = 1:$$

on en déduit, d'après la formule (29),

$$\frac{d\cos\lambda}{d\sigma} = \frac{\cos\lambda''}{\rho} = 0,$$
$$\frac{d\cos\mu}{d\sigma} = \frac{\cos\mu''}{\rho} = 0,$$
$$\frac{d\cos\nu}{d\sigma} = \frac{\cos\nu''}{\rho} = \frac{1}{\rho};$$



d'après la formule (30),

$$\frac{d\cos\lambda'}{d\sigma} = \frac{\cos\lambda''}{r} = 0,$$
$$\frac{d\cos\mu'}{d\sigma} = \frac{\cos\mu''}{r} = 0,$$
$$\frac{d\cos\nu'}{d\sigma} = \frac{\cos\nu''}{r} = \frac{1}{r};$$

d'après la formule (31),

$$\frac{d\cos\lambda''}{d\sigma} = -\frac{\cos\lambda}{\rho} - \frac{\cos\lambda'}{r} = -\frac{1}{\rho},$$
$$\frac{d\cos\mu''}{d\sigma} = -\frac{\cos\mu}{\rho} - \frac{\cos\mu'}{r} = -\frac{1}{r},$$
$$\frac{d\cos\nu''}{d\sigma} = -\frac{\cos\nu}{\rho} - \frac{\cos\nu'}{r} = 0;$$

d'après la formule (32),

$$\frac{d^2\cos\lambda}{d\sigma^2} = -\frac{\cos\lambda}{\rho^2} - \frac{\cos\lambda'}{r\rho} + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\lambda''}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2},$$
$$\frac{d^2\cos\mu}{d\sigma^2} = -\frac{\cos\mu}{\rho^2} - \frac{\cos\mu'}{r\rho} + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\mu''}{\rho}\right) = -\frac{1}{r\rho},$$
$$\frac{d^2\cos\nu}{d\sigma^2} = -\frac{\cos\nu}{\rho^2} - \frac{\cos\nu'}{r\rho} + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\nu''}{\rho}\right) = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\rho}\right);$$

d'après la formule (33),

$$\frac{d^2\cos\lambda'}{d\sigma^2} = -\frac{\cos\lambda}{r\rho} - \frac{\cos\lambda'}{r^2} + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\lambda''}{r}\right) = -\frac{1}{r\rho},$$
$$\frac{d^2\cos\mu'}{d\sigma^2} = -\frac{\cos\mu}{r\rho} - \frac{\cos\mu'}{r^2} + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\mu''}{r}\right) = -\frac{1}{r^2},$$
$$\frac{d^2\cos\nu'}{d\sigma^2} = -\frac{\cos\nu}{r\rho} - \frac{\cos\nu'}{r^2} + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\nu''}{r}\right) = \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right);$$

d'après la formule (34),

$$\frac{d^2\cos\lambda''}{d\sigma^2} = -\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\lambda}{\rho}\right) - \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\lambda'}{r}\right) - \left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\rho^2}\right)\cos\lambda'' = -\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\rho}\right),$$
$$\frac{d^2\cos\mu''}{d\sigma^2} = -\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\mu}{\rho}\right) - \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\mu'}{r}\right) - \left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\rho^2}\right)\cos\mu'' = -\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right),$$
$$\frac{d^2\cos\nu''}{d\sigma^2} = -\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\nu}{\rho}\right) - \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\nu'}{r}\right) - \left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\rho^2}\right)\cos\nu'' = -\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\rho^2}\right).$$

Ces formules étant établies, effectuons le changement d'axes ; nous avons

$$(35)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha\cos\lambda + \beta\cos\lambda' + \gamma\cos\lambda'', \\ y_1 = \alpha\cos\mu + \beta\cos\mu' + \gamma\cos\mu'', \\ z_1 = \alpha\cos\nu + \beta\cos\nu' + \gamma\cos\nu''; \end{cases}$$

nous en déduisons

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{d\sigma}\cos\lambda + \frac{d\beta}{d\sigma}\cos\lambda' + \frac{d\gamma}{d\sigma}\cos\lambda'' + \alpha\frac{d\cos\lambda}{d\sigma} + \beta\frac{d\cos\lambda'}{d\sigma} + \gamma\frac{d\cos\lambda''}{d\sigma},$$

qui se réduit, si l'on tient compte des valeurs trouvées précédemment pour les cosinus et leurs dérivées, à

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho}.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} = {} & \frac{d^2\alpha}{d\sigma^2}\cos\lambda + 2\frac{d\alpha}{d\sigma}\frac{d\cos\lambda}{d\sigma} + \alpha\frac{d^2\cos\lambda}{d\sigma^2} \\ & + \frac{d^2\beta}{d\sigma^2}\cos\lambda' + 2\frac{d\beta}{d\sigma}\frac{d\cos\lambda'}{d\sigma} + \beta\frac{d^2\cos\lambda'}{d\sigma^2} \\ & + \frac{d^2\gamma}{d\sigma^2}\cos\lambda'' + 2\frac{d\gamma}{d\sigma}\frac{d\cos\lambda''}{d\sigma} + \gamma\frac{d^2\cos\lambda''}{d\sigma^2}, \end{aligned}$$

qui se ramène à

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} - 2\frac{d\gamma}{d\sigma}\frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} - \frac{\beta}{r\rho} - \gamma\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

En effectuant ainsi les calculs pour les trois coordonnées, on est conduit aux formules suivantes :

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dx_1}{d\sigma} &= \frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho},\\
\frac{dy_1}{d\sigma} &= \frac{d\beta}{d\sigma} - \frac{\gamma}{r},\\
\frac{dz_1}{d\sigma} &= \frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\beta}{r} + \frac{\alpha}{\rho},\\
\frac{d^2x_1}{d\sigma^2} &= \frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} - 2\frac{d\gamma}{d\sigma}\frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} - \frac{\beta}{r\rho} - \gamma\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\rho}\right),\\
\frac{d^2y_1}{d\sigma^2} &= \frac{d^2\beta}{d\sigma^2} - 2\frac{d\gamma}{d\sigma}\frac{1}{r} - \frac{\alpha}{r\rho} - \frac{\beta}{r^2} - \gamma\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right),\\
\frac{d^2z_1}{d\sigma^2} &= \frac{d^2\gamma}{d\sigma^2} + 2\frac{d\alpha}{d\sigma}\frac{1}{\rho} + 2\frac{d\beta}{d\sigma}\frac{1}{r} + \alpha\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \beta\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right) - \gamma\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right).
\end{aligned}\right.$$

Afin de simplifier l'écriture et de donner aux équations une forme plus explicite en mettant en évidence des quantités utiles à considérer, nous poserons

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} = \varepsilon,$$

$$\frac{d\beta}{d\sigma} - \frac{\gamma}{r} = \psi,$$

$$\frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\beta}{r} + \frac{\alpha}{\rho} = \omega.$$

Ces quantités sont respectivement égales à $\frac{dx_1}{d\sigma}$, $\frac{dy_1}{d\sigma}$, $\frac{dz_1}{d\sigma}$, leur signification géométrique en résulte alors immédiatement, si l'on se rappelle que les quantités x_1, y_1, z_1 sont dirigées suivant les axes α, β, γ. La quantité ε est l'allongement relatif de l'élément de corde ; il est nul dans le cas que nous traitons, puisque la corde est inextensible. ψ est le sinus de l'angle que forme l'élément oscillant avec le plan osculateur qui est ici le plan

des $\alpha\gamma$. Enfin ω est l'angle de l'élément dont il s'agit avec le plan des $\alpha\beta$ perpendiculaire à la normale principale.

Avec ces notations, les formules (36) deviennent

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\sigma} &= \varepsilon, \\ \frac{dy_1}{d\sigma} &= \psi, \\ \frac{dz_1}{d\sigma} &= \omega, \\ \frac{d^2x_1}{d\sigma^2} &= \frac{d\varepsilon}{d\sigma} - \frac{\omega}{\rho}, \\ \frac{d^2y_1}{d\sigma^2} &= \frac{d\psi}{d\sigma} - \frac{\omega}{r}, \\ \frac{d^2z_1}{d\sigma^2} &= \frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{\psi}{r}. \end{aligned}\right.$$

Les dérivées par rapport à σ des quantités x_1, y_1, z_1 étant ainsi calculées, il nous reste à obtenir les dérivées de ces coordonnées par rapport à t, ainsi que par rapport à σ et t. Ce calcul est immédiat, si l'on remarque que les axes α, β, γ sont fixes lorsque σ est constant, c'est-à-dire que les angles $\lambda, \lambda', \lambda'', \mu, \mu', \mu'', \nu, \nu', \nu''$ sont constants dans cette hypothèse. Si donc on dérive les équations (35) par rapport à t, on a

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{d\alpha}{dt}\cos\lambda + \frac{d\beta}{dt}\cos\lambda' + \frac{d\gamma}{dt}\cos\lambda'', \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{d\alpha}{dt}\cos\mu + \frac{d\beta}{dt}\cos\mu' + \frac{d\gamma}{dt}\cos\mu'', \\ \frac{dz_1}{dt} &= \frac{d\alpha}{dt}\cos\nu + \frac{d\beta}{dt}\cos\nu' + \frac{d\gamma}{dt}\cos\nu'', \end{aligned}$$

équations qui se réduisent aux suivantes :

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{d\alpha}{dt}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{d\beta}{dt}, \\ \frac{dz_1}{dt} &= \frac{d\gamma}{dt}. \end{aligned}\right.$$

On trouve de même

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= \frac{d^2\alpha}{dt^2},\\ \frac{d^2y_1}{dt^2} &= \frac{d^2\beta}{dt^2},\\ \frac{d^2z_1}{dt^2} &= \frac{d^2\gamma}{dt^2},\end{aligned}\right.$$

et enfin, d'après les formules (37),

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{d\sigma\, dt} &= \frac{d\iota}{dt},\\ \frac{d^2y_1}{d\sigma\, dt} &= \frac{d\psi}{dt},\\ \frac{d^2z_1}{d\sigma\, dt} &= \frac{d\omega}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Si nous remarquons maintenant que, d'après le choix d'axes qui a été fait,

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{d\sigma} &= 1,\\ \frac{dy}{d\sigma} &= 0,\\ \frac{dz}{d\sigma} &= 0.\\ \frac{d^2x}{d\sigma^2} &= 0,\\ \frac{d^2y}{d\sigma^2} &= 0,\\ \frac{d^2z}{d\sigma^2} &= \frac{1}{\rho},\end{aligned}\right.$$

nous avons tous les éléments, par les formules (37), (38), (39), (40) et (41), pour transformer les équations (27) et (28) qui sont les équations des petites oscillations étudiées.

L'équation (27) devient alors

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} = 0,$$

ce qui devait être, d'après une remarque faite plus haut, puisque le premier membre est l'allongement relatif de l'élément de corde considéré et que cette corde est inextensible.

En désignant par A_1, B_1, C_1 [1] les accroissements des composantes, suivant les axes α, β, γ, de la force extérieure quand on passe du point géométrique considéré qui sert d'origine pour les axes mobiles au point (α, β, γ), on obtient, en somme, pour les équations (27) et (28) dans le nouveau système d'axes :

$$
(42) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2\alpha}{dt^2} = A_1 - \varpi\frac{\omega}{\rho} + \frac{dT_1}{d\sigma},\\
&\frac{d^2\beta}{dt^2} = B_1 + \frac{d\varpi}{dt}\psi + \varpi\left(\frac{d\psi}{d\sigma} - \frac{\omega}{r}\right) - 2V\frac{d\psi}{dt},\\
&\frac{d^2\gamma}{dt^2} = C_1 + \frac{d\varpi}{d\sigma}\omega + \varpi\left(\frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{\psi}{r}\right) - 2V\frac{d\omega}{dt} + \frac{T_1}{\rho}.\\
&\qquad\frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} = 0,\\
&\qquad\frac{d\beta}{d\sigma} - \frac{\gamma}{r} = \psi,\\
&\qquad\frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\beta}{r} + \frac{\alpha}{\rho} = \omega.
\end{aligned}
\right.
$$

Telles sont les équations des petites oscillations d'une corde autour de sa position de repos apparent, dans le système d'axes mobiles que nous avons choisi et qui conduit, croyons-nous, à la forme la plus simple sous laquelle ces équations puissent être obtenues.

VIII. — Équations des petites oscillations dans le cas ou la courbe de repos apparent est plane.

Ce cas particulier, très important, se traite immédiatement, puisqu'il suffit de supposer le rayon de seconde courbure r infini dans les équations

[1] Les quantités A_1, B_1, C_1 ne diffèrent pas des quantités désignées au § V par X_1, Y_1, Z_1; seulement elles sont exprimées en fonction de α, β, γ au lieu de x_1, y_1, z_1.

précédentes. Ces équations deviennent alors

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2\alpha}{dt^2} = A_1 - \varpi\frac{\omega}{\rho} + \frac{dT_1}{d\sigma},\\
&\frac{d^2\beta}{dt^2} = B_1 + \frac{d}{d\sigma}\left(\varpi\frac{d\beta}{d\sigma}\right) - 2V\frac{d^2\beta}{d\sigma\,dt},\\
&\frac{d^2\gamma}{dt^2} = C_1 + \frac{d}{d\sigma}(\varpi\,\omega) - 2V\frac{d\omega}{dt} + \frac{T_1}{\rho},\\
&\qquad\frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} = 0,\\
&\qquad\frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\alpha}{\rho} = \omega.
\end{aligned}\right.$$

Dans l'hypothèse où les oscillations considérées sont telles que la corde ne sort pas du plan de la courbe de repos apparent, β est nul et la seconde équation disparaît. Il est facile dans ce cas d'obtenir directement les équations précédentes sans passer par le cas général. Nous allons donner cette démonstration, qui aura l'avantage de fixer d'une façon précise le sens des termes figurant dans ces équations.

IX. — Établissement des équations des petites oscillations par la considération des mouvements relatifs, quand la courbe de repos apparent est plane et quand la corde est assujettie a rester plane.

Soient MM_1 la position d'un élément de courbe dans la courbe de repos apparent et $M'M'_1$ la position du même élément à un instant quelconque t [1] (*fig.* 1).

Le point M' peut être considéré comme en équilibre sous l'action de la tension $\mu T'$ de la corde en ce point, des forces extérieures et des forces d'inertie dues à son mouvement.

Si donc on désigne par F'_t et F'_n, φ'_t et φ'_n les composantes des forces

---

[1] Dans tout ce qui suit, on distinguera par l'accentuation les quantités se rapportant au mouvement réel; celles qui ne seront pas pourvues d'accent seront relatives à la courbe de repos apparent.

extérieures et des forces d'inertie suivant la tangente et la normale à $M'M'_1$ en M', on a

$$\frac{dT'}{ds'} + F'_t + \varphi'_t = 0, \tag{44}$$

$$\frac{T'}{\rho'} + F'_n + \varphi'_n = 0, \tag{45}$$

s' et ρ' étant l'arc et le rayon de courbure correspondant au point M' dans la courbe $M'M'_1$.

Prenons pour axes des α et des γ la tangente et la normale en M à la courbe de repos apparent et posons

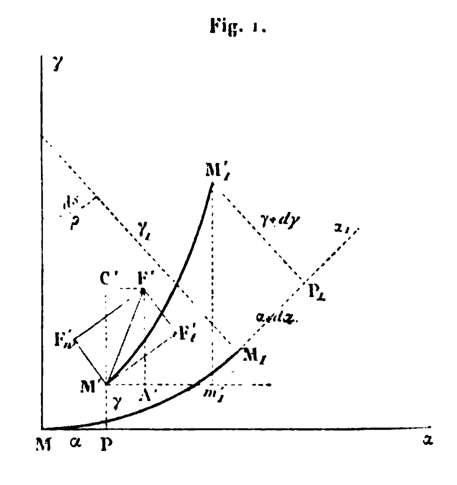
$$T' = T + T_1, \tag{46}$$

on a évidemment

$$\frac{ds'}{\rho'} = \frac{ds}{\rho} + d\omega, \tag{47}$$

ω étant l'angle de la tangente en M' avec la tangente en M.

Fig. 1.



D'un autre côté, si du point M'_1 on abaisse la perpendiculaire $M'_1 m'_1$ sur la droite $M'm'_1$ parallèle à la tangente M, on a

$$M'_1 m'_1 = ds' \sin\omega;$$

or, si l'on projette M' en P sur la tangente en M et M'_1 en P_1 sur la tangente en M_1, on peut regarder $M'_1 m'_1$ comme la projection sur l'axe $M\gamma$ du

chemin $M'_1P_1M_1MPM'$ et l'on trouve, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$M'_1 m'_1 = d\gamma + \alpha \frac{ds}{\rho};$$

on en déduit

$$ds' \sin\omega = d\gamma + \alpha \frac{ds}{\rho},$$

et comme la corde est inextensible, c'est-à-dire comme ds' est égal à ds, cette équation peut s'écrire, puisque ω est infiniment petit,

$$\omega = \frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho}. \tag{48}$$

Cela posé, la considération du triangle $M'_1 m'_1 M'$ donne

$$M' m'_1 = ds' \cos\omega,$$

et, d'autre part, en regardant $M'm'_1$ comme la projection sur l'axe des α du chemin $M'PMM_1P_1M'_1$,

$$M' m'_1 = ds + d\alpha - \gamma \frac{ds}{\rho};$$

on en déduit, en égalant ces deux expressions,

$$\frac{d\alpha}{ds} - \frac{\gamma}{\rho} = 0, \tag{49}$$

qui est l'une des équations [1] auxquelles nous sommes arrivé par la méthode précédente.

---

[1] Cette équation qui, ainsi que nous l'avons vu, exprime que la corde est inextensible, conduit à une expression simple de la différence de longueur d'un arc à courbure régulière d'une faible étendue et d'une courbe serpentant autour de cet arc. En effet, l'arc compris entre deux poulies ne correspondant jamais qu'à un très petit nombre de degrés, ρ peut être considéré comme constant. On déduit, dès lors, de l'équation (49),

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{1}{\rho}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \gamma\, d\sigma,$$

σ_1 et σ_2, α_1 et α_2 étant les deux valeurs de chacune des quantités σ et α pour les points A et B de contact des poulies et du câble.

Mais $\alpha_2 - \alpha_1$ représente la variation de longueur du câble entre A et B, $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \gamma\, d\sigma$ représente la

Représentons maintenant par A′ et C′ les composantes suivant $M\alpha$ et $M\gamma$ de la force extérieure agissant sur M′; on aura

$$(50) \quad \begin{cases} F'_t = \quad A'\cos\omega + C'\sin\omega = \quad A' + C'\left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho}\right), \\ F'_n = -A'\sin\omega + C'\cos\omega = -A'\left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho}\right) + C'. \end{cases}$$

De même, en représentant par φ'_α et φ'_γ les composantes de la force d'inertie par rapport aux mêmes axes, on obtient

$$(51) \quad \begin{cases} \varphi'_t = \varphi'_\alpha + \varphi'_\gamma\left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho}\right), \\ \varphi'_n = -\varphi'_\alpha\left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho}\right) + \varphi'_\gamma. \end{cases}$$

Il suffit donc, pour avoir toutes les quantités qui figurent dans les équations du mouvement (44) et (45), de calculer φ'_α et φ'_γ; c'est ce que nous allons faire.

Pour cela, nous déterminerons les composantes suivant $M\alpha$ et $M\gamma$ de l'accélération du point M′, en regardant le mouvement de ce point comme résultant d'un mouvement relatif par rapport aux axes en question et du mouvement d'entraînement de ces mêmes axes. Il faudra, par suite, d'après la théorie connue, calculer successivement l'accélération relative, l'accélération du point M supposé fixe par rapport aux axes mobiles, et enfin l'accélération centrifuge composée.

L'accélération relative a évidemment pour composantes, suivant $M\alpha$ et $M\gamma$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ et $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$. Quant à l'accélération d'entraînement, ses composantes suivant la tangente et la normale à la trajectoire de M′ dans le mouvement d'entraînement sont $\frac{dV'_1}{dt}$ et $\frac{V'^2_1}{\rho'_1}$, V'_1 et ρ'_1 étant la vitesse de M′ dans ce mouvement et le rayon de courbure de la trajectoire dont il s'agit.

---

surface comprise entre la courbe qu'affecte le câble et la courbe de repos apparent; ces deux quantités étant nulles en même temps, d'après l'équation précédente, on a le théorème suivant :

Si, pour un petit déplacement du câble, la longueur comprise entre les poulies reste constante, c'est que la figure qu'il affecte à la suite de ce déplacement détermine de part et d'autre de la courbe de repos apparent des surfaces égales. La réciproque est vraie.

Mais le mouvement d'entraînement élémentaire est une rotation autour du centre instantané de rotation C de la courbe de repos apparent; la vitesse angulaire de cette rotation est $\frac{V}{\rho}$; la distance du point M' à C est $\rho - \gamma$, puisque les quantités α et γ sont petites; on a donc

(52) $$V'_1 = \frac{\rho - \gamma}{\rho} V.$$

On en déduit

(53) $$\frac{dV'_1}{dt} = - V^2 \gamma \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

car γ est constant puisqu'il s'agit du mouvement d'entraînement.

Quant à la composante normale $\frac{V'^2_1}{\rho'_1}$, il faut, pour l'obtenir, calculer ρ'_1.

Or, si l'on désigne par C' le centre de courbure de la trajectoire d'entraînement en M', on a, au degré d'approximation adopté,

$$\rho'_1 = \rho - \gamma + CC',$$

et

$$\frac{CC'}{CM'} = \frac{Cp}{M'M'_1 - Cp},$$

Cp étant perpendiculaire à CM'.

On trouve aisément

$$Cp = d\rho \frac{\alpha}{\rho - \gamma},$$

$$M'M'_1 = ds \frac{\rho - \gamma}{\rho};$$

on en conclut

$$CC' = \alpha \frac{d\rho}{ds},$$

et, par suite,

(54) $$\rho'_1 = \rho\left(1 - \frac{\gamma}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\right).$$

Des formules (52) et (54) on déduit

$$\frac{V'^2_1}{\rho'_1} = \frac{V^2}{\rho}\left(1 - \frac{\gamma}{\rho}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho}\frac{d\rho}{ds}},$$

expression qui peut se ramener à la suivante :

(55) $$\frac{V_1'^2}{\rho_1'} = \frac{V^2}{\rho}\left(1 - \frac{\gamma}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\right).$$

Les composantes de l'accélération d'entraînement suivant les axes Mα et Mγ sont alors, en désignant par φ l'angle MCM',

$$\frac{dV_1'}{dt}\cos\varphi - \frac{V_1'^2}{\rho_1'}\sin\varphi = \frac{dV_1'}{dt} - \frac{V_1'^2}{\rho_1'}\frac{\alpha}{\rho-\gamma},$$

$$\frac{dV_1'}{dt}\sin\varphi + \frac{V_1'^2}{\rho_1'}\cos\varphi = \frac{dV_1'}{dt}\frac{\alpha}{\rho-\gamma} + \frac{V_1'^2}{\rho_1'},$$

ou encore, en tenant compte des formules (53) et (55),

$$-V^2\gamma\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{V^2}{\rho^2}\alpha,$$

$$\frac{V^2}{\rho} - \gamma\frac{V^2}{\rho^2} + \alpha V^2\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Quant aux composantes de l'accélération centrifuge composée suivant Mα et Mγ, elles sont

$$2\frac{V}{\rho}\frac{d\gamma}{dt} \quad \text{et} \quad -2\frac{V}{\rho}\frac{d\alpha}{dt},$$

car les composantes de la vitesse relative sont $\frac{d\alpha}{dt}$ et $\frac{d\gamma}{dt}$, la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe instantané dans le mouvement d'entraînement est $\frac{V}{\rho}$ et l'angle de cet axe instantané et de la vitesse relative est égal à un angle droit.

On a donc, en somme,

(56) $$\begin{cases} \varphi'_\alpha = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} - 2\dfrac{V}{\rho}\dfrac{d\gamma}{dt} - \alpha\dfrac{V^2}{\rho^2} - \gamma V^2\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{\rho}\right), \\ \varphi'_\gamma = \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} + 2\dfrac{V}{\rho}\dfrac{d\alpha}{dt} - \gamma\dfrac{V^2}{\rho^2} + \alpha V^2\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{\rho}\right) + \dfrac{V^2}{\rho}. \end{cases}$$

En portant ces expressions dans les équations (51), on obtient

$$\varphi'_t = \frac{d^2\alpha}{dt^2} - 2\frac{V}{\rho}\frac{d\gamma}{dt} - \alpha\frac{V^2}{\rho^2} - \gamma V^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$
$$+ \left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho}\right)\left[\frac{d^2\gamma}{dt^2} + 2\frac{V}{\rho}\frac{d\alpha}{dt} - \gamma\frac{V^2}{\rho^2} + \alpha V^2\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{V^2}{\rho}\right],$$

$$\varphi'_n = \frac{d^2\gamma}{dt^2} + 2\frac{V}{\rho}\frac{d\alpha}{dt} - \gamma\frac{V^2}{\rho^2} + \alpha V^2\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$
$$+ \frac{V^2}{\rho} - \left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho}\right)\left[\frac{d^2\alpha}{dt^2} - 2\frac{V}{\rho}\frac{d\gamma}{dt} - \alpha\frac{V^2}{\rho^2} - \gamma V^2\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].$$

Il ne reste plus qu'à substituer ces valeurs ainsi que celles de F'_t et F'_n fournies par les équations (50) dans les équations du mouvement (44) et (45). En tenant compte alors des équations du mouvement permanent de la corde

$$\frac{dT}{ds} + A = 0 \qquad \frac{T}{\rho} + C - \frac{V^2}{\rho} = 0,$$

posant, comme précédemment,

$$A' = A + A_1 \qquad C' = C + C_1,$$

et se rappelant les relations

$$s + Vt = \sigma,$$
$$\frac{d\alpha}{ds} - \frac{\gamma}{\rho} = 0,$$
$$\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho} = \omega,$$
$$T - V^2 = \varpi,$$

on trouve, toutes simplifications faites,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = A_1 - \varpi\frac{\omega}{\rho} + \frac{dT_1}{d\sigma},$$
$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = C_1 + \frac{d}{d\sigma}(\varpi\omega) - 2V\frac{d\omega}{dt} + \frac{T_1}{\rho},$$

qui sont identiques à celles que nous avons obtenues comme cas particulier de la question générale.



X. — Conséquences des équations du mouvement; théorème sur les oscillations latérales dans le cas ou la courbe de repos apparent est plane.

Reprenons, pour les discuter, les équations du mouvement dans le cas où la courbe de repos apparent est plane, mais où la corde n'est plus assujettie à rester plane. Ces équations sont les suivantes :

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2\alpha}{dt^2} = A_1 - \varpi\frac{\omega}{\rho} + \frac{dT_1}{d\sigma},\\
&\frac{d^2\beta}{dt^2} = B_1 + \frac{d}{d\sigma}\left(\varpi\frac{d\beta}{d\sigma}\right) - 2V\frac{d^2\beta}{d\sigma\,dt},\\
&\frac{d^2\gamma}{dt^2} = C_1 + \frac{d}{d\sigma}(\varpi\omega) - 2V\frac{d\omega}{dt} + \frac{T_1}{\rho},\\
&\qquad\frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} = 0,\\
&\qquad\frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\alpha}{\rho} = \omega.
\end{aligned}\right.$$

La seconde de ces équations ne contient pas l'accroissement de tension T_1; d'autre part, si B_1 ne dépend que de β et si A_1 et C_1 en sont indépendants, cette seconde équation ne contient que β. En modifiant β, on ne fera donc pas varier T_1, et réciproquement.

Or β, qui est dirigé suivant la perpendiculaire au plan de la courbe, représente ce que l'on peut appeler l'*oscillation latérale* [1].

---

[1] Les trois quantités α, β, γ ont une signification pratique qu'il est indispensable de signaler pour le cas des transmissions télédynamiques.

Les variations de la coordonnée α du point d'enroulement correspondent aux variations de vitesse relative des deux poulies, c'est-à-dire aux irrégularités du mouvement de rotation résultant des changements qu'éprouve le travail résistant.

Les variations de la coordonnée β du point d'enroulement sont dues aux déplacements produits par le *gauche* des poulies.

Enfin les variations de la coordonnée γ du point d'enroulement résultent de ce que les poulies ne sont pas bien centrées, ce qui a pour effet de soulever et d'abaisser périodiquement le point d'enroulement.

On voit ainsi que, dans ce cas, ces oscillations n'influent en rien sur la tension et que, réciproquement, lorsque les conditions indiquées sont remplies, les variations de tension ne peuvent produire d'oscillations latérales.

Ce théorème, qui est évidemment applicable aux transmissions télédynamiques, puisque, la seule force extérieure étant alors la pesanteur, les quantités A_1, B_1 et C_1 sont nulles, peut être traduit dans ce cas par l'énoncé suivant :

Dans une transmission télédynamique, les oscillations latérales n'ont pas d'influence sur la tension et, par suite, sur la régularité du mouvement. Réciproquement, les changements de tension produits par les inégalités de vitesse des poulies, c'est-à-dire par les variations du travail résistant, ne peuvent donner lieu directement à des oscillations latérales.

Les équations (43), relatives à la courbe plane, se simplifient notablement et donnent lieu à des conséquences intéressantes lorsqu'on suppose que la seule force agissante est la pesanteur, que la corde est tout d'abord au repos, que le mouvement a lieu dans un plan et que l'arc considéré ne comprend qu'un très petit nombre de degrés dans le voisinage du sommet. Nous allons traiter ce cas particulier, qui a été déjà l'objet d'un remarquable travail de M. Resal [1].

II. — Équations des petits mouvements d'une chainette.

La pesanteur étant constante, les quantités A_1, B_1, C_1 sont nulles; le mouvement ayant lieu dans le plan des $\alpha\gamma$, on laissera de côté l'équation en β; enfin, la corde étant supposée primitivement au repos, V est égal à zéro, $\mathfrak{T}$ à T et σ à s.

---

[1] Resal, *Traité de Mécanique générale*, t. I, p. 328, § 97 : *Équations des petits mouvements d'une chaînette.*

Les équations (43) prennent alors la forme

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= -\frac{T}{\rho}\omega + \frac{dT_1}{ds},\\ \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= \frac{d(T\omega)}{ds} + \frac{T_1}{\rho},\\ \frac{d\alpha}{ds} - \frac{\gamma}{\rho} &= 0,\\ \frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho} &= \omega. \end{aligned}\right.$$

Si l'on élimine T_1 entre les deux premières, on trouve

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d\gamma}{ds} - \frac{\alpha}{\rho}\right) = \omega\left(\frac{T}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\frac{dT}{ds} + \frac{d^2T}{ds^2}\right)&\\ + \frac{d\omega}{ds}\left(2\frac{dT}{ds} + \frac{T}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\right) + T\frac{d^2\omega}{ds^2} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\frac{d^2\gamma}{dt^2}.& \end{aligned}\right.$$

On sait d'ailleurs que dans le cas de la chaînette, si l'on appelle θ l'angle de l'élément ds avec l'horizontale et R le rayon de courbure au sommet, on a

$$\rho = \frac{R}{\cos^2\theta},$$

$$s = R\,\mathrm{tang}\,\theta,$$

$$T = \frac{Rg}{\cos\theta},$$

g étant l'accélération due à la pesanteur [1].

---

[1] Ces formules sont faciles à établir. On a, en effet (voir *Mécanique générale* de M. Resal, t. I, p. 311),

$$\mu\frac{dT}{ds} = p\sin\theta,$$

$$\mu T\frac{d\theta}{ds} = p\cos\theta,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dT}{T} = \frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos\theta},$$

et, par suite,

$$T = \frac{c}{\cos\theta};$$

On en déduit

$$\frac{d\rho}{ds} = 2 \tang\theta,$$

$$\frac{T}{\rho} = g \cos\theta,$$

$$\frac{dT}{ds} = g \sin\theta,$$

$$\frac{d^2T}{ds^2} = \frac{g}{R} \cos^2\theta.$$

Si l'on suppose maintenant l'angle θ assez petit pour qu'il soit permis de négliger les termes qui le contiennent à une puissance supérieure à la première, on peut écrire

$$\rho = R,$$

$$s = R\theta,$$

$$T = Rg,$$

$$\frac{d\rho}{ds} = 2\theta,$$

$$\frac{T}{\rho} = g,$$

$$\frac{dT}{ds} = g\theta,$$

$$\frac{d^2T}{ds^2} = \frac{g}{R}.$$

---

on a alors

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{c}{g} \frac{1}{\cos^2\theta},$$

ce qui donne

$$s = \frac{c}{g} \tang\theta.$$

Mais pour θ égal à zéro, le rayon de courbure R est donné par la valeur de $\frac{ds}{d\theta}$, c'est-à-dire est égal à $\frac{c}{g}$; on a donc

$$c = Rg,$$

et les formules deviennent

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{R}{\cos^2\theta},$$

$$s = R \tang\theta,$$

$$T = \frac{Rg}{\cos\theta},$$

qui sont bien les formules du texte.

En portant ces valeurs dans les équations (57), on obtient, au degré d'approximation adopté,

$$(59)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = -g\omega + \dfrac{dT_1}{ds}, \\ \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} = Rg\dfrac{d\omega}{ds} + \dfrac{T_1}{R}, \\ \dfrac{d\alpha}{ds} - \dfrac{\gamma}{R} = 0, \\ \dfrac{d\gamma}{ds} + \dfrac{\alpha}{R} = \omega, \end{cases}$$

et l'équation (58) devient

$$(60)\quad \frac{d^2\left(\dfrac{d\gamma}{ds} - \dfrac{\alpha}{R}\right)}{dt^2} = 2\frac{g}{R}\omega + Rg\frac{d^2\omega}{ds^2};$$

mais, si l'on dérive la troisième des équations (59) par rapport à s, on a

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{1}{R}\frac{d\gamma}{ds},$$

et l'on en conclut, par la quatrième équation,

$$R\frac{d^2\alpha}{ds^2} + \frac{\alpha}{R} = \omega,$$

et, par suite,

$$\alpha = \sin\frac{s}{R}\int\omega\cos\frac{s}{R}\,ds - \cos\frac{s}{R}\int\omega\sin\frac{s}{R}\,ds,$$

ou simplement, puisque l'arc $\frac{s}{R}$ est petit,

$$(61)\quad \alpha = \frac{1}{R}\left(s\int\omega\,ds - \int\omega s\,ds\right).$$

Il résulte de là que la quantité α peut se mettre sous la forme

$$\alpha = 2\frac{s^2}{R}\omega',$$

ω' étant une certaine valeur intermédiaire entre les diverses valeurs de ω [1].

Cette relation nous conduit à cette conséquence importante que $\frac{\alpha}{R}$ est petit par rapport à ω, puisque l'angle $\frac{s}{R}$ est, par hypothèse, petit.

Quant à $\frac{d\gamma}{ds}$ ou, si l'on veut, $R\frac{d^2\alpha}{ds^2}$, il est du même ordre de grandeur que ω, d'après la relation

$$\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{R} = \omega, \tag{62}$$

et il peut être pris égal à cette quantité, puisque $\frac{\alpha}{R}$ est négligeable.

Les équations (60) et (62) deviennent alors

$$\frac{d\gamma}{ds} = \omega, \tag{63}$$

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{2g}{R}\omega + Rg\frac{d^2\omega}{ds^2}, \tag{64}$$

et la dernière peut s'écrire [2],

$$2\omega + \frac{d^2\omega}{d\theta^2} - \frac{R}{g}\frac{d^2\omega}{dt^2} = 0, \tag{65}$$

---

[1] De l'équation (61) on déduit

$$\alpha = \frac{s^2}{R}(\omega'_1 - \omega'_2),$$

ω'_1 et ω'_2 étant deux valeurs intermédiaires entre les diverses valeurs de ω. Mais, comme $\omega'_1 - \omega'_2$ est au plus double de la plus grande valeur absolue de ω, on peut poser

$$\alpha = 2\frac{s^2}{R}\omega',$$

ω' étant aussi une valeur intermédiaire de ω.

[2] On a en effet, par l'équation (64),

$$2\omega + R^2\frac{d^2\omega}{ds^2} - \frac{R}{g}\frac{d^2\omega}{dt^2} = 0;$$

mais

$$s = R\theta,$$

d'où

$$\frac{d^2\omega}{d\theta^2} = \frac{d^2\omega}{ds^2}R^2,$$

ce qui conduit à l'équation (65).

qui, sauf les notations, est identiquement celle indiquée par M. Resal pour les petits mouvements d'une chaînette.

Le problème se termine d'ailleurs, dans le cas particulier que nous étudions, par de simples quadratures. En effet, la valeur de ω est donnée, comme on sait, par la suite

$$\omega = \sum k \cos\left[(\theta + \varepsilon)\sqrt{\frac{Rk'^2}{g} + 2}\right]\cos k'(t + \varepsilon'),$$

ε, ε', k et k' étant des constantes.

Quant à γ et à α, ils sont fournis par les relations

$$\gamma = \int \omega\, ds, \tag{66}$$

$$\alpha = \frac{1}{R}\int \gamma\, ds = \frac{1}{R}\int\int \omega\, ds^2. \tag{67}$$

Il est d'ailleurs facile de reconnaître, à l'aide d'une intégration par parties, que cette dernière expression revient bien à l'expression (61) donnée plus haut.

XII. — Détermination des quantités qui expriment les oscillations planes d'une corde animée d'un mouvement d'entrainement.

Nous avons donné au paragraphe précédent l'expression intégrale, déjà obtenue par M. Resal, des quantités qui expriment les oscillations planes d'une corde en repos ; il est possible, dans le cas d'une corde soumise à la pesanteur et animée d'un mouvement d'entraînement, d'arriver à des valeurs analogues. Ces valeurs ne présentent pas d'intérêt direct pour le but que nous poursuivons ; cependant, comme elles constituent une généralisation aux transmissions télédynamiques des résultats auxquels est parvenu M. Resal dans le cas du câble au repos, nous allons les indiquer ici.

Reprenons pour cela les équations (43), qui sont, comme on l'a vu, les équations des petites oscillations d'une courbe funiculaire primitivement plane et appliquons-les au cas des transmissions télédynamiques horizontales ou sensiblement horizontales.

La seule force extérieure étant alors la pesanteur qui est constante, ces équations deviennent

$$(68) \qquad \frac{dT_1}{d\sigma} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \varpi\frac{\omega}{\rho},$$

$$(69) \qquad 0 = \frac{d^2\beta}{dt^2} - \frac{d}{d\sigma}\left(\varpi\frac{d\beta}{d\sigma}\right) + 2V\frac{d^2\beta}{d\sigma\,dt},$$

$$(70) \qquad \frac{T_1}{\rho} = \frac{d^2\gamma}{dt^2} - \frac{d}{d\sigma}(\varpi\omega) + 2V\frac{d\omega}{dt},$$

$$(71) \qquad \frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} = 0,$$

$$(72) \qquad \frac{d\gamma}{d\sigma} - \frac{\alpha}{\rho} = 0.$$

Discutons tout d'abord l'équation (69) qui ne contient que β et qui, ainsi que nous l'avons vu dans la note de la page 36, correspond aux oscillations latérales dues au gauche que peuvent avoir les poulies.

Posons

$$\sigma + at = \xi,$$
$$\sigma + bt = \zeta;$$

nous aurons

$$\frac{d^2\beta}{d\sigma^2} = \frac{d^2\beta}{d\xi^2} + 2\frac{d^2\beta}{d\xi\,d\zeta} + \frac{d^2\beta}{d\zeta^2},$$
$$\frac{d^2\beta}{d\sigma\,dt} = a\frac{d^2\beta}{d\xi^2} + (a+b)\frac{d^2\beta}{d\xi\,d\zeta} + b\frac{d^2\beta}{d\zeta^2},$$
$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = a^2\frac{d^2\beta}{d\xi^2} + 2ab\frac{d^2\beta}{d\xi\,d\zeta} + b^2\frac{d^2\beta}{d\zeta^2}.$$

Mais, dans l'équation (69), le terme $\frac{d}{d\sigma}\left(\varpi\frac{d\beta}{d\sigma}\right)$ peut être pris égal à $\varpi\frac{d^2\beta}{d\sigma^2}$, puisque le câble est sensiblement horizontal, c'est-à-dire puisque la valeur moyenne de $\frac{d\varpi}{d\sigma}$ est négligeable en raison de la symétrie par rapport à la verticale menée au milieu de l'arc.

L'équation (69) devient, dès lors,

$$(\varpi - 2Va - a^2)\frac{d^2\beta}{d\xi^2}$$
$$+ 2[\varpi - V(a+b) + a^3 b]\frac{d^2\beta}{d\xi\,d\zeta} + (\varpi - 2Vb - b^2)\frac{d^2\beta}{d\zeta^2} = 0,$$

et, si l'on prend pour a et b les racines de l'équation

$$\varepsilon - 2Vz - z^2 = 0,$$

elle se réduit à

$$\frac{d^2\beta}{d\xi\, d\zeta} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\beta = F_1(\xi) + F_2(\zeta).$$

Les quantités a et b sont égales à

$$-V \pm \sqrt{V^2 + \varepsilon},$$

ou encore à

$$-V \pm \sqrt{T},$$

puisque

$$\varepsilon = T - V^2.$$

On en déduit pour β, en remplaçant σ par $s + Vt$,

$$\beta = F_1(s + \sqrt{T}t) + F_2(s - \sqrt{T}t).$$

Cette équation ne diffère pas au fond de celle de la corde vibrante et, si les extrémités du câble conservaient le même β, c'est-à-dire si les poulies n'avaient aucun gauche, l'équation précédente pourrait être traitée exactement de la même manière, et l'on arriverait à trouver le mouvement de la corde perpendiculairement à son plan, connaissant sa forme initiale et les vitesses de ses différents points.

Mais si l'on veut tenir compte du gauche que peuvent avoir les poulies, les valeurs extrêmes de β, correspondant aux valeurs $-s_0$ et $+s_0$ de s, ne sont plus nulles; elles varient avec le temps, et l'on a

$$F_1(-s_0 + \sqrt{T}t) + F_2(-s_0 + \sqrt{T}t) = \varphi_{-s_0}(t),$$
$$F_1(s_0 + \sqrt{T}t) + F_2(s_0 + \sqrt{T}t) = \varphi_{s_0}(t).$$

Les fonctions $\varphi_{-s_0}(t)$ et $\varphi_{s_0}(t)$, qu'il suffit alors de déterminer, peuvent être obtenues de la manière suivante :

Soit r le rayon de la poulie P correspondant à s_0; nous lui supposons

un certain gauche, c'est-à-dire qu'elle fait un angle ε avec une poulie idéale P′ de même centre et de même rayon, parfaitement perpendiculaire à l'arbre. Comptons le temps à partir du moment où le point A commun à ces deux poulies est le point d'enroulement.

Au bout du temps t, le point A se trouve en B sur la poulie P et l'on a

$$\text{arc}\,\text{AB} = r\omega t = \text{V}t,$$

ω désignant la vitesse angulaire.

Ce point A devrait être au point b de la poulie P′ tel que

$$\text{arc}\,\text{A}b = \text{arc}\,\text{AB};$$

la déviation est donc égale à Bb, et, par suite, pour obtenir $\varphi_{s_0}(t)$, il suffit de projeter Bb sur la perpendiculaire au plan du câble ou, si l'on veut, au plan de la poulie idéale P′. On a, dès lors,

$$\varphi_{s_0}(t) = \text{B}b \cos\frac{\varepsilon}{2},$$

puisque Bb est perpendiculaire au plan bissecteur de l'angle des deux poulies P et P′.

Mais l'on a évidemment

$$\text{B}b = 2(\text{corde}\,\text{A}b)\sin\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\text{corde}\,\text{A}b = 2r\sin\frac{\text{V}t}{2r};$$

on en déduit

$$\varphi_{s_0}(t) = 2r\sin\varepsilon\sin\frac{\text{V}t}{2r}.$$

On aura de même

$$\varphi_{-s_0}(t) = 2r\sin\varepsilon'\sin\frac{\text{V}t}{2r},$$

et ces deux équations, en déterminant les fonctions F_1 et F_2, permettront d'obtenir la coordonnée β.

Quant aux coordonnées α, γ et à la tension T_1, il est facile d'obtenir le

terme général de chacune des séries qui les représente, en opérant de la manière suivante.

Reprenons les équations (68), (70), (71) et (72) et éliminons γ et ω; nous avons, en remarquant toujours que $\frac{d\varpi}{d\sigma}$ et $\frac{d\rho}{d\sigma}$ peuvent être considérés comme nuls,

$$\frac{dT_1}{d\sigma} - \varpi\left(\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} + \frac{\alpha}{\rho^2}\right) - \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0;$$

$$\frac{T_1}{\rho} + \varpi\rho\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} + \frac{\alpha}{\rho^2}\right) - 2V\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} + \frac{\alpha}{\rho^2}\right) - \rho\frac{d^3\alpha}{d\sigma\, dt^2} = 0,$$

et, si l'on élimine T_1 entre ces deux équations, on obtient, en supposant négligeables $\frac{d^2\varpi}{d\sigma^2}$ et $\frac{d^2\rho}{d\sigma^2}$,

$$\varpi\left(\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} + \frac{\alpha}{\rho^2}\right) + \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \varpi\rho^2\frac{d^2}{d\sigma^2}\left(\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} + \frac{\alpha}{\rho^2}\right)$$
$$- 2V\rho^2\frac{d^2}{d\sigma\, dt}\left(\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} + \frac{\alpha}{\rho^2}\right) - \rho^2\frac{d^2}{d\sigma^2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0.$$

Posons

$$\alpha = Ce^{\lambda\sigma+\mu t},$$

nous en déduisons

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = C\lambda e^{\lambda\sigma+\mu t},$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = C\mu e^{\lambda\sigma+\mu t},$$

$$\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} = C\lambda^2 e^{\lambda\sigma+\mu t},$$

$$\frac{d^2\alpha}{d\sigma\, dt} = C\lambda\mu e^{\lambda\sigma+\mu t},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = C\mu^2 e^{\lambda\sigma+\mu t},$$

$$\frac{d^3\alpha}{d\sigma\, dt^2} = C\lambda\mu^2 e^{\lambda\sigma+\mu t},$$

$$\frac{d^4\alpha}{d\sigma^2\, dt^2} = C\lambda^2\mu^2 e^{\lambda\sigma+\mu t},$$

$$\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2}+\frac{\alpha}{\rho^2}=C\left(\lambda^2+\frac{1}{\rho^2}\right)e^{\lambda\sigma+\mu t},$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2}+\frac{\alpha}{\rho^2}\right)=C\lambda\left(\lambda^2+\frac{1}{\rho^2}\right)e^{\lambda\sigma+\mu t},$$

$$\frac{d^2}{d\sigma^2}\left(\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2}+\frac{\alpha}{\rho^2}\right)=C\lambda^2\left(\lambda^2+\frac{1}{\rho^2}\right)e^{\lambda\sigma+\mu t},$$

$$\frac{d^2}{d\sigma\,dt}\left(\frac{d^2\alpha}{d\sigma^2}+\frac{\alpha}{\rho^2}\right)=C\lambda\mu\left(\lambda^2+\frac{1}{\rho^2}\right)e^{\lambda\sigma+\mu t}.$$

L'équation précédente devient alors

$$\mathfrak{T}\left(\lambda^2+\frac{1}{\rho^2}\right)+\mu^2+\mathfrak{T}\rho^2\lambda^2\left(\lambda^2+\frac{1}{\rho^2}\right)-2V\rho^2\lambda\mu\left(\lambda^2+\frac{1}{\rho^2}\right)-\rho^2\lambda^2\mu^2=0,$$

qui est satisfaite lorsqu'on pose

$$\mu^2(1-\lambda^2\rho^2)-2V\lambda(1+\lambda^2\rho^2)\mu+\mathfrak{T}\left(\lambda^2+\frac{1}{\rho^2}\right)(1+\lambda^2\rho^2)=0.$$

On tire de là, après simplification,

$$\mu=\frac{1+\lambda^2\rho^2}{1-\lambda^2\rho^2}\left(V\lambda\pm\sqrt{T\lambda^2-\frac{\mathfrak{T}}{\rho^2}}\right),$$

et l'on a, par suite,

$$\alpha=\sum Ce^{\lambda\sigma+\frac{1+\lambda^2\rho^2}{1-\lambda^2\rho^2}\left(V\lambda\pm\sqrt{T\lambda^2-\frac{\mathfrak{T}}{\rho^2}}\right)t};$$

on en déduit

$$\gamma=\rho\frac{d\alpha}{d\sigma}=\rho\sum C\lambda e^{\lambda\sigma+\frac{1+\lambda^2\rho^2}{1-\lambda^2\rho^2}\left(V\lambda\pm\sqrt{T\lambda^2-\frac{\mathfrak{T}}{\rho}}\right)t}.$$

Enfin, pour calculer T_1, il suffit, d'après l'équation (70), de prendre

$$T_1=\rho\left[\frac{d^2\gamma}{dt^2}+2V\left(\frac{d^2\gamma}{d\sigma\,dt}+\frac{1}{\rho}\frac{d\alpha}{dt}\right)-\mathfrak{T}\left(\frac{d^2\gamma}{d\sigma^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\alpha}{d\sigma}\right)\right];$$

or, on a

$$\frac{d\gamma}{d\sigma}=\rho C\lambda^2e^{\lambda\sigma+\mu t},$$

$$\frac{d\gamma}{dt}=\rho C\lambda\mu e^{\lambda\sigma+\mu t},$$

$$\frac{d^2\gamma}{d\sigma^2} = \rho C\lambda^3 e^{\lambda\sigma+\mu t},$$

$$\frac{d^2\gamma}{d\sigma\, dt} = \rho C\lambda^2 \mu e^{\lambda\sigma+\mu t},$$

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \rho C\lambda\mu^2 e^{\lambda\sigma+\mu t}.$$

On en conclut, toutes simplifications faites,

$$T_1 = \sum C e^{\lambda\sigma+\mu t}[\rho^2\lambda\mu^2 + (2V\mu - \varpi\lambda)(1+\lambda^2\rho^2)],$$

et, en remplaçant μ par sa valeur,

$$T_1 = \sum 2C\frac{(1+\lambda^2\rho^2)^2}{(1-\lambda^2\rho^2)^2}\left(V^2 \pm V\sqrt{T\lambda^2 - \frac{\varpi}{\rho^2}} - \varpi\frac{1-\lambda^2\rho^2}{1+\lambda^2\rho^2}\right)e^{\lambda\sigma+\mu t}.$$

Les formules que nous venons d'indiquer présenteraient de l'intérêt si l'on voulait traiter complètement, au point de vue mathématique, le problème des câbles; mais ce n'est pas là le but que nous nous proposons. Nous voulons résoudre la question au point de vue mécanique et arriver à des règles pratiques simples; la marche que nous suivrons sera, dès lors, toute différente.

XIII. — Détermination des tensions moyennes développées aux extrémités d'un câble oscillant autour de sa position de repos apparent.

Les équations des petites oscillations d'un câble oscillant autour de sa position de repos apparent sont, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, fournies par les équations (68), (69), (70), (71) et (72). Mais les oscillations latérales n'ayant pas d'influence sur la tension, ainsi que cela a été démontré au § X, nous pouvons laisser de côté l'équation (69) dans le calcul des tensions moyennes développées aux extrémités du câble.

D'autre part, l'arc compris entre deux poulies ne comprend jamais qu'un petit nombre de degrés; il est donc permis, avec une approxi-

mation suffisante, de considérer ρ comme constant. L'équation (71) donnant

$$\gamma = \rho \frac{d\alpha}{d\sigma},$$

on en déduit

$$\frac{d\gamma}{d\sigma} = \rho \frac{d^2\alpha}{d\sigma^2},$$

et l'équation (72) devient

$$\rho \frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} + \frac{\alpha}{\rho} = \omega.$$

Enfin le câble étant sensiblement horizontal, c'est-à-dire ses deux extrémités pouvant être considérées comme situées à la même hauteur, la valeur moyenne de $\frac{d\varpi}{d\sigma}$ peut être regardée comme nulle.

L'équation (70) donne alors

$$\frac{T_1}{\rho} = \frac{d^2\gamma}{dt^2} - \varpi \frac{d\omega}{d\sigma} + 2V \frac{d\omega}{dt},$$

et l'on a, en somme, pour représenter les équations des petites oscillations,

$$\frac{dT_1}{d\sigma} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \varpi \frac{\omega}{\rho}, \tag{73}$$

$$\frac{T_1}{\rho} = \frac{d^2\gamma}{dt^2} - \varpi \frac{d\omega}{d\sigma} + 2V \frac{d\omega}{dt}, \tag{74}$$

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} = 0, \tag{75}$$

$$\rho \frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} + \frac{\alpha}{\rho} = \omega, \tag{76}$$

où l'on considère ρ et ϖ comme des constantes.

Ces équations étant établies vont nous permettre de calculer l'accroissement de la tension T_1 correspondant aux déplacements α' et α'' des extrémités du câble [1].

---

[1] Nous ne nous occupons ici pour les extrémités du câble que de déplacements α' et α'' dirigés suivant la tangente à la courbe de repos apparent, car nous voulons étudier la régularité du mouvement, et, d'après ce que nous avons dit dans la page 53, les variations de travail résistant

Pour cela, remarquons que l'on peut, au degré d'approximation admis, remplacer ω par sa valeur moyenne prise sous la forme

$$\omega = A\sigma + B,$$

A et B étant deux quantités qui ne dépendent que du temps, et substituer cette expression de ω dans le calcul des intégrales

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\int\int \omega d\sigma^2,$$
$$\gamma = \int \omega d\sigma,$$

qui, ainsi que nous l'avons vu, donnent α et γ quand ω est connu (¹).

On a alors, par l'équation (76),

$$\rho \frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} + \frac{\alpha}{\rho} = A\sigma + B,$$

d'où l'on déduit

$$\alpha = \sin\frac{\sigma}{\rho}\int (A\sigma + B)\cos\frac{\sigma}{\rho}d\sigma - \cos\frac{\sigma}{\rho}\int (A\sigma + B)\sin\frac{\sigma}{\rho}d\sigma;$$

et, comme $\frac{\sigma}{\rho}$ est petit, puisque l'arc ne comprend qu'un petit nombre de degrés,

$$\alpha = \frac{\sigma}{\rho}\int (A\sigma + B)d\sigma - \int (A\sigma + B)\frac{\sigma}{\rho}d\sigma;$$

or,

$$\int (A\sigma + B)\frac{\sigma}{\rho}d\sigma = \frac{\sigma}{\rho}\int (A\sigma + B)d\sigma - \frac{1}{\rho}\int d\sigma \int (A\sigma + B)d\sigma;$$

on a, par suite,

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\int d\sigma \int (A\sigma + B)d\sigma.$$

---

en modifiant la vitesse relative des deux poulies, correspondent à des variations de la coordonnée α du point d'enroulement.

(¹) *Voir* formules (66) et (67), § XI. Nous ne refaisons pas ce calcul, qui est identique à celui du § XI, puisque ρ est constant.

On en conclut

$$(77)\qquad \rho\alpha = \frac{A\sigma^3}{6} + \frac{B\sigma^2}{2} + C\sigma + D,$$

C et D étant des quantités qui ne dépendent que du temps.

Quant à γ, il est fourni par la relation

$$\gamma = \int (A\sigma + B)d\sigma,$$

ou encore

$$\gamma = \frac{A\sigma^2}{2} + B\sigma + C,$$

C ayant la même valeur que dans α, puisque γ est égal à $\rho\frac{d\alpha}{d\sigma}$.

Les quatre quantités A, B, C, D se déterminent en exprimant que γ est nul aux extrémités σ' et σ'', ce qui donne

$$o = \frac{A\sigma'^2}{2} + B\sigma' + C,$$

$$o = \frac{A\sigma''^2}{2} + B\sigma'' + C,$$

et en écrivant que les valeurs de α pour σ' et σ'' sont α' et α'', c'est-à-dire

$$\rho\alpha' = \frac{A\sigma'^3}{6} + \frac{B\sigma'^2}{2} + C\sigma' + D,$$

$$\rho\alpha'' = \frac{A\sigma''^3}{6} + \frac{B\sigma''^2}{2} + C\sigma'' + D.$$

Supposons, pour simplifier les calculs, que l'origine des σ est prise au milieu du câble, de telle sorte que σ', étant égal à $-\sigma_0$, σ'', est égal à σ_0; les quatre équations de condition précédentes se réduisent alors à

$$B = o,$$

$$\frac{A\sigma_0^2}{2} + C = o,$$

$$\rho(\alpha' + \alpha'') = B\sigma_0^2 + 2D,$$

$$\rho(\alpha'' - \alpha') = \frac{A\sigma_0^3}{3} + 2C\sigma_0.$$

On en tire

$$A = -\tfrac{3}{2}\rho\frac{\alpha''-\alpha'}{\sigma_0^3},$$

$$B = 0,$$

$$C = \tfrac{3}{4}\rho\frac{\alpha''-\alpha'}{\sigma_0},$$

$$D = \tfrac{\rho}{2}(\alpha'+\alpha''),$$

et l'on a

(78) $$\alpha = \frac{\alpha'+\alpha''}{2} - \frac{\alpha''-\alpha'}{4}\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}-3\right)\frac{\sigma}{\sigma_0};$$

on en déduit

(79) $$\gamma = \tfrac{3}{4}\rho\frac{\alpha''-\alpha'}{\sigma_0}\left(1-\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right),$$

et enfin

(80) $$\omega = -\tfrac{3}{2}\rho(\alpha''-\alpha')\frac{\sigma}{\sigma_0^3}.$$

Il nous faut maintenant porter ces valeurs dans les équations (73) et (74), afin de calculer T_1 en fonction de α', α'' et σ.

Nous emploierons pour cela un mode particulier de développement des fonctions, à l'aide des valeurs moyennes de la fonction et de ses dérivées successives, que nous avons fait connaître dans un autre travail [1]. Ce développement, borné à ses deux premiers termes, donne la formule

(81) $$T_1 = (\text{moy}\,T_1) + \sigma\left(\text{moy}\frac{dT_1}{d\sigma}\right),$$

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, dirigé par M. Resal; 3e série, t. VII, juin 1881. — *Développement d'une fonction à une seule variable, dans un intervalle donné, suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives dans cet intervalle.*

Nous avons montré que l'on pouvait représenter une fonction quelconque de x, dans l'intervalle de $-h$ à $+h$, par la suite

$$y = [\text{Moy}\,y]_{-h}^{+h} + \frac{3x}{3.1!}\left[\text{Moy}\frac{dy}{dx}\right]_{-h}^{+h} + \frac{3x^2-h^2}{3.2!}\left[\text{Moy}\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{-h}^{+h} + \frac{3x^3-3h^2x}{3.3!}\left[\text{Moy}\frac{d^3y}{dx^3}\right]_{-h}^{+h} + \cdots$$

dans laquelle il est entendu que

$$\text{moy}\, T_1 = \frac{1}{2\sigma_0}\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} T_1\, d\sigma,$$

$$\text{moy}\, \frac{dT_1}{d\sigma} = \frac{1}{2\sigma_0}\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} \frac{dT_1}{d\sigma}\, d\sigma.$$

Or, si l'on porte les valeurs obtenues pour α, γ et ω [formules (78), (79), (80)] dans les équations (73) et (74), on obtient

$$\frac{dT_1}{d\sigma} = \frac{1}{2}\frac{d^2(\alpha'+\alpha'')}{dt^2} - \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} - 3\right)\frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{d^2(\alpha''-\alpha')}{dt^2} - \frac{3}{2}\varpi(\alpha''-\alpha')\frac{\sigma}{\sigma_0^3},$$

$$\frac{T_1}{\rho} = \frac{3}{4}\rho\left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)\frac{1}{\sigma_0}\frac{d^2(\alpha''-\alpha')}{dt^2} + \frac{3}{2}\varpi\rho\frac{\alpha''-\alpha'}{\sigma_0^3} - 3V\rho\frac{\sigma}{\sigma_0^3}\frac{d(\alpha''-\alpha')}{dt},$$

et, par suite,

$$\int\frac{dT_1}{d\sigma}d\sigma = \frac{1}{2}\frac{d^2(\alpha'+\alpha'')}{dt^2}\sigma - \frac{\sigma^2}{2\sigma_0}\left(\frac{\sigma^2}{2\sigma_0^2} - 3\right)\frac{d^2(\alpha''-\alpha')}{dt^2} - \frac{3}{4}\varpi(\alpha''-\alpha')\frac{\sigma^2}{\sigma_0^3},$$

$$\int T_1 d\sigma = \rho^2\left[\frac{3}{4}\left(1 - \frac{\sigma^2}{3\sigma_0^2}\right)\frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{d^2(\alpha''-\alpha')}{dt^2} + \frac{3}{2}\varpi(\alpha''-\alpha')\frac{\sigma}{\sigma_0^3} - \frac{3}{2}V\frac{\sigma^2}{\sigma_0^3}\frac{d(\alpha''-\alpha')}{dt}\right];$$

on en conclut

$$\text{moy}\frac{dT_1}{d\sigma} = \frac{1}{2\sigma_0}\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0}\frac{dT_1}{d\sigma}d\sigma = \frac{1}{2}\frac{d^2(\alpha'+\alpha'')}{dt^2},$$

$$\text{moy}\, T_1 = \frac{1}{2\sigma_0}\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} T_1 d\sigma = \frac{3}{2}\varpi\frac{\rho^2}{\sigma_0^3}(\alpha''-\alpha') + \frac{\rho^2}{2\sigma_0}\frac{d^2(\alpha''-\alpha')}{dt^2}.$$

Ces valeurs, portées dans la formule (81), donnent

$$(82)\qquad T_1 = \frac{3}{2}\varpi\frac{\rho^2}{\sigma_0^3}(\alpha''-\alpha') + \frac{\rho^2}{2\sigma_0}\frac{d^2(\alpha''-\alpha')}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{d^2(\alpha'+\alpha'')}{dt^2}\sigma,$$

et l'on a ainsi, pour les tensions cherchées aux deux extrémités,

$$(83)\qquad T'_1 = \frac{3}{2}\varpi\frac{\rho^2}{\sigma_0^3}(\alpha''-\alpha') + \frac{\rho^2}{2\sigma_0}\frac{d^2(\alpha''-\alpha')}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{d^2(\alpha'+\alpha'')}{dt^2}\sigma_0,$$

$$(84)\qquad T''_1 = \frac{3}{2}\varpi\frac{\rho^2}{\sigma_0^3}(\alpha''-\alpha') + \frac{\rho^2}{2\sigma_0}\frac{d^2(\alpha''-\alpha')}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{d^2(\alpha''+\alpha')}{dt^2}\sigma_0.$$

Ces deux formules, qui fournissent l'expression des variations de tension

aux deux extrémités en fonction des déplacements de ces extrémités, vont nous permettre l'étude complète de la régularité du mouvement dans les transmissions télédynamiques.

XIV. — Calcul du coefficient de régularité du mouvement dans les transmissions par cables.

Nous avons montré au début de ce travail que la régularité du mouvement dans une transmission par câble dépendait du rapport entre le déplacement relatif des extrémités et l'accroissement de tension qui en résulte.

Le bon fonctionnement de la transmission exige que ce coefficient reste compris entre certaines valeurs déterminées. Ces valeurs sont d'ailleurs fixées dans chaque cas par la double condition de maintenir, d'une part, au-dessous d'une limite convenable, l'amplitude des oscillations de la vitesse du mécanisme et, d'autre part, de ne pas dépasser une certaine limite donnée pour les accélérations passagères des diverses parties de ce mécanisme et les vitesses de changement des tensions.

Voici comment peut être déterminée la valeur de ce coefficient :

Désignons par l la demi-portée du câble, par f la flèche de l'un de ses brins, par p le poids de ce câble par unité de longueur et affectons de l'indice 1 les quantités relatives au brin conducteur et de l'indice 2 celles relatives au brin conduit.

Nous aurons, au degré d'approximation adopté [1],

$$(85) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{G}_1 &= \rho_1 g, \\ \mathfrak{G}_2 &= \rho_2 g, \\ \rho_1 &= \frac{l^2}{2f_1}, \\ \rho_2 &= \frac{l^2}{2f_2}. \end{aligned} \right.$$

[1] Considérons, en effet, un câble à l'état de repos apparent et remplaçons la courbe qu'il dessine par un cercle passant par le sommet O et par les deux extrémités A et B; on aura

$$l^2 = f(2\rho - f),$$

Distinguons maintenant par un accent les quantités relatives à la poulie menée, et par deux accents celles relatives à la poulie qui mène ; puis, représentons par $\mu\tau$ les accroissements de tension qui se produisent aux extrémités des brins du câble, quand le mouvement permanent est altéré. On a alors, d'après les équations (83) et (84) et en tenant compte des relations (85),

$$\mu\tau'_1 = \frac{3}{16}p\frac{l^3}{f_1^3}(\alpha''-\alpha') + \frac{1}{8}\frac{p}{g}\frac{l^3}{f_1^2}\frac{d^2(\alpha''-\alpha')}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{pl}{g}\frac{d^2(\alpha'+\alpha'')}{dt^2},$$

$$\mu\tau''_1 = \frac{3}{16}p\frac{l^3}{f_1^3}(\alpha''-\alpha') + \frac{1}{8}\frac{p}{g}\frac{l^3}{f_1^2}\frac{d^2(\alpha''-\alpha')}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{pl}{g}\frac{d^2(\alpha'+\alpha'')}{dt^2},$$

pour le brin conducteur ;

$$\mu\tau'_2 = \frac{3}{16}p\frac{l^3}{f_2^3}(\alpha'-\alpha'') + \frac{1}{8}\frac{p}{g}\frac{l^3}{f_2^2}\frac{d^2(\alpha'-\alpha'')}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{pl}{g}\frac{d^2(\alpha''+\alpha')}{dt^2},$$

$$\mu\tau''_2 = \frac{3}{16}p\frac{l^3}{f_2^3}(\alpha'-\alpha'') + \frac{1}{8}\frac{p}{g}\frac{l^3}{f_2^2}\frac{d^2(\alpha'-\alpha'')}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{pl}{g}\frac{d^2(\alpha''+\alpha')}{dt^2},$$

pour le brin conduit.

Les augmentations de traction $\mu\tau$ qui se produiront à la circonférence

---

et comme f est, par hypothèse, très petit,

$$\rho = \frac{l^2}{2f}.$$

D'autre part, on voit que [*voir* § III, équation (17)]

$$\mathfrak{T} = \rho F_n,$$

F_n étant la composante normale de la force extérieure.

Ici

$$F_n = g\cos\alpha,$$

α étant l'angle de la normale au point considéré avec la normale au sommet ; par suite,

$$\mathfrak{T} = \rho g \cos\alpha,$$

ou, puisque α reste toujours très petit,

$$\mathfrak{T} = \rho g.$$

de chacune des poulies seront donc

$$\mu\tau' = \mu\tau'_1 - \mu\tau'_2 = \frac{3}{16} p l^3 \left(\frac{1}{f_1^3} + \frac{1}{f_2^3}\right)(\alpha'' - \alpha')$$
$$+ \frac{1}{8}\frac{p}{g} l^3 \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}\right)\frac{d^2(\alpha''-\alpha')}{dt^2} - \frac{p}{g} l \frac{d^2(\alpha''+\alpha')}{dt^2},$$

$$\mu\tau'' = \mu\tau''_1 - \mu\tau''_2 = \frac{3}{16} p l^3 \left(\frac{1}{f_1^3} + \frac{1}{f_2^3}\right)(\alpha'' - \alpha')$$
$$+ \frac{1}{8}\frac{p}{g} l^3 \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}\right)\frac{d^2(\alpha''-\alpha')}{dt^2} + \frac{p}{g} l \frac{d^2(\alpha''+\alpha')}{dt^2},$$

que l'on peut réduire l'une et l'autre à

$$(86) \quad \mu\tau = \frac{3}{16} p l^3 \left(\frac{1}{f_1^3} + \frac{1}{f_2^3}\right)(\alpha'' - \alpha') + \frac{1}{8}\frac{p}{g} l^3 \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}\right)\frac{d^2(\alpha''-\alpha')}{dt^2},$$

puisque les flèches sont toujours petites relativement à la portée.

Telle est la relation qui donne l'accroissement de tension effective en fonction du déplacement relatif des extrémités du câble.

Cette relation peut se mettre sous une autre forme.

Désignons par ω' et ω'' les vitesses angulaires des deux poulies, par R leur rayon commun et par Ω la vitesse angulaire correspondant au mouvement permanent; on a évidemment

$$d\alpha' = \mathrm{R}(\omega' - \Omega)\, dt,$$
$$d\alpha'' = \mathrm{R}(\omega'' - \Omega)\, dt,$$

et l'équation (86) devient, si l'on prend sa dérivée par rapport au temps,

$$(87) \quad \frac{d(\mu\tau)}{dt} = \frac{3}{16} p l^3 \left(\frac{1}{f_1^3} + \frac{1}{f_2^3}\right)\mathrm{R}(\omega'' - \omega') + \frac{1}{8} p l^3 \mathrm{R}\left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}\right)\frac{d^2(\omega''-\omega')}{dt^2},$$

que l'on peut réduire, au point de vue des applications, au terme principal

$$(88) \qquad \frac{d(\mu\tau)}{dt} = \frac{3}{16} p l^3 \left(\frac{1}{f_1^3} + \frac{1}{f_2^3}\right)\mathrm{R}(\omega'' - \omega'),$$

car, d'une part, le terme négligé est en général petit par rapport au terme

maintenu puisque les flèches sont petites et, d'autre part, ce terme négligé est susceptible de changer de signe avec le temps.

En résumé donc, nous avons les deux relations

$$(89) \qquad \mu\tau = \frac{3}{16} p l^2 \left(\frac{1}{f_1^3} + \frac{1}{f_2^3}\right)(\alpha'' - \alpha'),$$

$$(88) \qquad \frac{d(\mu\tau)}{dt} = \frac{3}{16} p l^2 \left(\frac{1}{f_1^3} + \frac{1}{f_2^3}\right) R(\omega'' - \omega').$$

L'équation (88) est identique à celle qu'a obtenue M. Kretz ([1]) dans le cas des transmissions par brin élastique,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{K}(r\omega - r'\omega'),$$

à la condition de poser ([2])

$$\frac{1}{K} = \frac{3}{16} p l^2 \left(\frac{1}{f_1^3} + \frac{1}{f_2^3}\right).$$

Le coefficient qui précède et que nous pouvons prendre pour coefficient de régularité, d'après ce qui a été dit au début de ce travail et au commencement de ce paragraphe, devra rester compris entre certaines limites, d'une part pour que l'on ait un mouvement suffisamment régulier malgré les variations du travail résistant et, d'autre part, pour que ces variations ne puissent donner lieu à des secousses trop brusques. Mais il est clair que ce coefficient, qui représente en quelque sorte la régularité absolue de la transmission, ne peut à lui seul donner une idée du fonctionnement, c'est-à-dire permettre de comparer deux transmissions actionnant deux machines de même espèce. On conçoit, en effet, que si la seconde machine exerce un effet double de celui exercé par la première, les variations de cet effort dues à une même cause sont d'ordinaire dans le rapport de 2 à 1. Pour que les deux transmissions soient comparables, il faut donc que les excès de tension produits sur les deux câbles soient, eux aussi,

---

([1]) Voir *Cours de Mécanique appliquée aux machines,* de Poncelet; Notes de M. Kretz, n° 46, Section II; n°s 61 et 63, Section III.

([2]) La quantité T de M. Kretz est celle que nous avons désignée par $\mu\tau$.

dans ce rapport, c'est-à-dire que le câble qui transmet un effort double ait un coefficient de régularité deux fois plus grand.

On voit d'après cela que deux transmissions seront *équivalentes,* au point de vue du fonctionnement, lorsque le rapport du coefficient de régularité à l'effort utile exercé aura la même valeur pour les deux. C'est ce rapport qui permettra d'apprécier le fonctionnement d'une transmission télédynamique, et nous lui donnerons, pour cette raison, le nom de *coefficient de fonctionnement*.

Il est inutile d'insister sur l'importance de ce coefficient qui, d'après ce qui précède, se comprend d'elle-même. L'idée des câbles équivalents que nous venons d'exposer est l'idée fondamentale de la partie pratique de ce travail. C'est elle qui nous permettra, maintenant que la théorie générale est terminée, d'en déduire les règles à suivre pour l'établissement des transmissions télédynamiques.

DEUXIÈME PARTIE.

CONSÉQUENCES PRATIQUES DE LA THÉORIE GÉNÉRALE.

I. — Relations entre les divers éléments d'une transmission télédynamique.

Soients :

$2l$ la portée en mètres;
f_0 la flèche au repos commune aux deux brins;
m la flèche relative au repos $\frac{f}{2l}$;
f_1 la flèche du brin moteur pendant le mouvement;
f_2 la flèche du brin conduit;
p le poids du câble par mètre courant en kilogrammes;
μ la masse de l'unité de longueur du câble;
k le rapport des flèches f_1 et f_2;
V la vitesse en mètres;

N le nombre de chevaux transmis;

4λ la somme des longueurs des deux brins comptées au repos à partir des points de contact des deux poulies extrêmes;

θ_1, θ_2 les tensions des deux brins par millimètre carré;

Θ_1, Θ_2 les tensions totales des deux brins;

Θ la tension utile $\Theta_1 - \Theta_2$;

σ la tension d'incurvation par millimètre carré résultant de la courbure du câble sur la poulie;

χ la somme $\theta_1 + \sigma$;

Ω la section en fer du câble, exprimée en millimètres carrés;

R et D le rayon et le diamètre des poulies-câbles en millimètres;

δ le diamètre des fils en millimètres;

i le nombre des fils;

$\mathfrak{R}$ le coefficient de régularité;

$\mathfrak{F}$ le coefficient de fonctionnement $\frac{\mathrm{R}}{\Theta}$.

Nous allons établir les équations qui lient ces divers éléments.

On a d'abord, par la définition même des quantités m, k, Θ et χ,

(1) $$f_0 = 2ml,$$

(2) $$f_2 = kf_1,$$

(3) $$\Theta = \Theta_1 - \Theta_2,$$

(4) $$\chi = \theta_1 + \sigma.$$

La relation qui existe entre les flèches f_0, f_1 et f_2 résulte de l'inextensibilité du câble et s'obtient comme il suit :

λ étant la demi-longueur de l'un des brins et l la demi-corde correspondante, on peut poser, puisque $\frac{\lambda}{l}$ est petit ([1]),

$$\lambda - l = \frac{\lambda^3}{6\,\mathrm{R}^2},$$

([1]) La formule suivante exprime que la différence entre un arc petit et son sinus est sensiblement égale au sixième du cube de l'arc.

R étant le rayon du cercle qu'il est permis de substituer à l'arc formé par le brin considéré, puisque cet arc ne comprend qu'un petit nombre de degrés.

Mais l'on a, d'autre part,

$$R = \frac{l^2}{2f};$$

on en déduit

$$\lambda - l = \frac{2}{3}\frac{f^2}{l},$$

au degré d'approximation adopté.

Cette formule s'applique évidemment aussi bien au câble au repos qu'à l'un quelconque des brins pendant le mouvement supposé uniforme; si donc l'on désigne par λ_0 la valeur de λ commune aux deux brins dans l'état de repos et par λ_1, λ_2 les valeurs de λ pour chaque brin pendant le mouvement, on a

$$\lambda_0 - l = \frac{2}{3}\frac{f_0^2}{l},$$

$$\lambda_1 - l = \frac{2}{3}\frac{f_1^2}{l},$$

$$\lambda_2 - l = \frac{2}{3}\frac{f_2^2}{l};$$

mais le câble est inextensible, c'est-à-dire que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_0.$$

On en conclut, pour la relation cherchée entre les flèches,

$$(5) \qquad f_1^2 + f_2^2 = 2f_0^2,$$

et l'on tire alors des équations (2) et (5)

$$(6) \qquad f_1 = 2ml\sqrt{\frac{2}{1+k^2}},$$

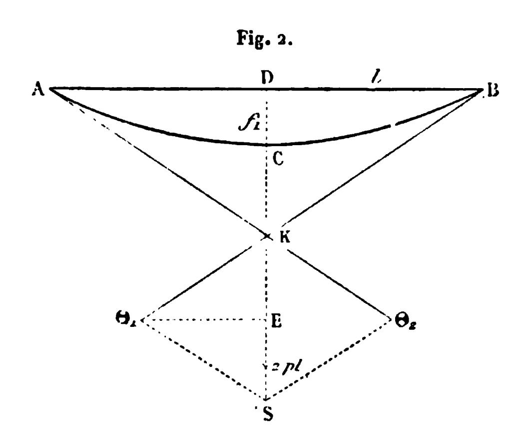
$$(7) \qquad f_2 = 2mlk\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}.$$

Cherchons maintenant l'expression de la tension Θ_1. Cette expression

pourrait être déduite directement des formules établies dans la première Partie, mais il est préférable d'employer une démonstration directe, afin de mieux préciser le sens des divers termes.

Considérons un câble en mouvement uniforme de vitesse V et désignons, comme nous l'avons fait aux §§ XIII et XIV de la première Partie, par ρ_1 le rayon de courbure moyen de l'arc d'un petit nombre de degrés que forme

Fig. 2.



le brin moteur. Il y a équilibre entre les forces réellement appliquées à ce brin (qui sont les tensions Θ_1 et le poids $2pl$) et les forces d'inertie, qui se réduisent ici à la force centrifuge $2\mu l \frac{V^2}{\rho_1}$, dirigée verticalement de haut en bas. On a donc (*fig.* 2)

$$2pl + 2\mu l \frac{V^2}{\rho_1} = 2\Theta_1 \cos \text{DKB}.$$

Mais la longueur DK pouvant être regardée comme égale à $2f_1$ (¹), et f_1

(¹) Le raisonnement fait ici, et l'expression de la tension à laquelle il nous conduira, s'appliqueraient à une transmission faiblement inclinée. Dans ce cas, en effet, en raison de la faible courbure totale, la forme du câble peut être assimilée à celle d'une parabole à axe vertical; les deux tangentes en A et B se coupent dès lors, sensiblement, sur la verticale du milieu de AB, et KD peut être encore pris égal à $2f_1$. Seulement il est nécessaire, pour que l'approximation obtenue soit satisfaisante, que le câble ne soit pas trop incliné, afin que la résultante des actions de la pesanteur puisse être considérée comme appliquée sur la verticale de D ou, si l'on veut, afin que les deux tensions aux extrémités d'un brin puissent être considérées comme égales.

Il sera donc entendu, une fois pour toutes, que les conclusions auxquelles nous serons conduit s'appliqueront aux transmissions faiblement inclinées, sous la réserve de prendre pour flèche la portion de verticale comprise entre le câble et le milieu de la corde.



étant très petit, par rapport à l, on a

$$\cos \mathrm{DKB} = \frac{2f_1}{l}.$$

On a de même

$$\rho_1 = \frac{l^2}{2f_1};$$

en portant ces valeurs dans l'équation précédente, on obtient

$$\Theta_1 - \mu V^2 = \frac{pl^2}{2f_1}; \tag{8}$$

une équation analogue donnera la tension totale du brin conduit,

$$\Theta_2 - \mu V^2 = \frac{pl^2}{2f_2}. \tag{9}$$

Ces équations peuvent s'écrire, en remplaçant f_1 et f_2 par leurs valeurs,

$$\Theta_1 - \mu V^2 = \frac{pl}{4m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}, \tag{10}$$

$$\Theta_2 - \mu V^2 = \frac{pl}{4m}\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}. \tag{11}$$

On en conclut

$$\Theta = \frac{pl}{4m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\left(1 - \frac{1}{k}\right). \tag{12}$$

Mais Θ, qui est la tension utile multipliée par l'espace V parcouru pendant une seconde, donne le travail 75 N exprimé en kilogrammètres; on a donc

$$\Theta = \frac{75\,\mathrm{N}}{V}, \tag{13}$$

et, si l'on égale les deux valeurs de Θ fournies par les équations (12) et (13), on trouve, pour le poids du câble par mètre courant,

$$p = \frac{300\,m\mathrm{N}}{Vl\left(1 - \frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}. \tag{14}$$

La section en fer Ω, exprimée en millimètres carrés, est alors, en admettant pour densité moyenne Δ du câble, rapportée à cette section, le chiffre de $\frac{1000}{114}$ (¹),

(15) $$\Omega = 114p,$$

ou encore

(16) $$\Omega = \frac{34200mN}{Vl}\frac{k}{k-1}\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}.$$

Il est alors facile de calculer les tensions θ_1 et θ_2 des deux brins par millimètre carré; en effet,

(17) $$\theta_1 = \frac{\Theta_1}{\Omega} = \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{V^2}{114g},$$

(18) $$\theta_2 = \frac{\Theta_2}{\Omega} = \frac{l}{456mk}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{V^2}{114g}.$$

La tension θ_1 que supporte la partie non enroulée du brin conducteur, et que l'on peut considérer comme constante dans toute l'étendue de ce brin, d'après les formules du § XIII de la première Partie, n'est pas la seule

(¹) Nous avons admis ici le chiffre de $\frac{1000}{114}$ indiqué par M. Reulaux. *Voir*, au sujet de la discussion à laquelle peut donner lieu ce chiffre, le § III de cette deuxième Partie.

On prend quelquefois

$$\Delta = \frac{1000}{104};$$

on a alors, ainsi que cela va être établi plus loin,

$$\Omega = 104p = \frac{31200}{Vl}\frac{k}{k-1}\sqrt{\frac{2}{1+k^2}},$$

$$\theta_1 = \frac{l}{416m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{V^2}{104g},$$

$$\theta_2 = \frac{l}{416mk}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{V^2}{104g},$$

$$i = 132\frac{p}{\delta^2},$$

et les autres formules ne changent pas.

Nous prendrons donc dans nos équations Δ égal à $\frac{1000}{114}$, mais sous la réserve que l'on y fera au besoin les modifications qui viennent d'être indiquées.

que supporte le câble; il est soumis aussi à celle qui se produit dans la partie enroulée, tension que l'on désigne sous le nom de *tension d'incurvation*, et qui est donnée par la relation ([1])

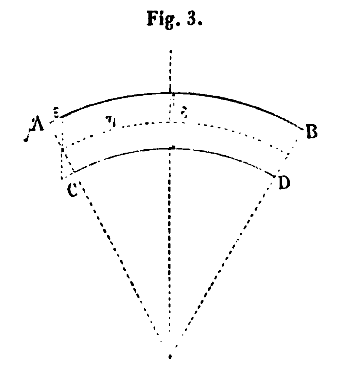
$$(19) \qquad \sigma = \frac{20000\,\delta}{D}.$$

Cette tension d'incurvation, négligeable pour les courroies où le module d'élasticité n'est que de 15, peut devenir relativement considérable pour les câbles où ce module est de 20000 ([2]), quand le diamètre des poulies diminue ou quand celui des fils augmente.

([1]) Il peut être utile de rappeler comment cette formule s'obtient.

Considérons (*fig.* 3) une portion infiniment petite ABCD d'un câble enroulé sur une poulie;

Fig. 3.



soient 2η la longueur de cette portion, R le rayon de la poulie, ε l'allongement que subit la ligne extérieure AB; on a évidemment

$$\frac{\varepsilon}{\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{\eta}{R+\delta},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\varepsilon}{\eta} = \frac{\delta}{D};$$

or la tension σ, produite par l'incurvation, est égale au module d'élasticité (qui, pour le fer et l'acier, est de 20 000) multiplié par l'allongement $\frac{\varepsilon}{\eta}$ de l'unité de longueur; on a donc

$$\sigma = \frac{20\,000\,\delta}{D}.$$

([2]) Cette grande valeur du module d'élasticité explique pourquoi les câbles peuvent être regardés comme inextensibles au point de vue de la traction.

Le Tableau suivant donne les valeurs de cette tension dans les limites de la pratique.

TABLEAU N° 1.

Valeurs de la tension d'incurvation σ par millimètre carré.

δ.	D											
	1m.	1m,50.	2m.	2m,50.	3m.	3m,50.	4m.	4m,50.	5m.	5m,50.	6m.	6m,50.
mm	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg
0,5....	10,0	6,7	5,0	4,0	3,3	2,9	2,5	2,2	2,0	1,8	1,7	1,5
0,6....	12,0	8,0	6,0	4,8	4,0	3,4	3,0	2,9	2,4	2,2	2,0	1,8
0,7....	14.6	9,3	7,0	5,6	4,7	4,0	3,5	3,2	2,8	2,6	2,3	2,2
0,8....	18,0	10,7	8,0	6,4	5,3	4,6	4,0	3,7	3,2	2,9	2,7	2,5
0,9....	20,0	12,0	9,0	7,2	6,0	5,1	4,5	4,0	3,6	3,3	3,0	2,8
1,0....	24,0	13,3	10,0	8,0	6,7	5.7	5,0	4.4	4,0	3,6	3,3	3,1
1,2....	28,0	16,0	12,0	9,6	8,0	6,9	6,0	5,8	4,8	4,4	4,0	3,7
1,4 (1).	»	18,7	14,0	11,2	9,3	8,0	7,0	6,4	5,6	5,1	4,7	4,3
1,6....	»	21,3	16,0	12,8	10,7	9,1	8,0	7,3	6,4	5,8	5,3	4,9
1,8....	»	24,0	18,0	14,4	12,0	10,3	9,0	8,0	7,2	6,5	6,0	5,5
2,0....	»	26,7	20,0	16,0	13,3	11,4	10,0	8,9	8,0	7,3	6,7	6,2
2,2....	»	29,3	22,0	17,6	14,7	12.6	11,0	9,8	8,8	8,0	7,3	6,8
2,4....	»	»	24,0	19,2	16,0	13,7	12,0	10,6	9,6	8,7	8,0	7,4
2,6....	»	»	26,0	20,8	17,3	14,8	13,0	11,6	10,4	9,5	8,7	8,0
2,8....	»	»	28,0	22,4	18,7	16,0	14,0	12,9	11,2	10,2	9,3	8,6
3,0....	»	»	30,0	24,0	20,0	17,1	15,0	13,3	12,0	10,9	10,0	9,2

(1) Les guillemets placés dans le Tableau remplacent des tensions supprimées comme dépassant la limite d'élasticité du fer.

Quant au nombre des fils, il est fourni par l'équation

$$(20) \qquad i = \frac{\Omega}{\left(\frac{\pi\delta^2}{4}\right)},$$

qui devient, si l'on remplace Ω par $114p$,

$$(21) \qquad i = 145\frac{p}{\delta^2}.$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à rappeler la valeur du coefficient

de régularité

$$(22)\qquad \mathcal{R} = \frac{3}{16}pl^3\left(\frac{1}{f_1^3}+\frac{1}{f_2^3}\right),$$

qui peut s'écrire, en remplaçant f_1 et f_2 par leurs valeurs précédemment trouvées,

$$(23)\qquad \mathcal{R} = \frac{3}{256\sqrt{2}}\frac{p}{m^3}(1+k^2)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{k^3}\right),$$

ou encore, en substituant à m sa valeur tirée de l'équation (12),

$$(24)\qquad \mathcal{R} = \frac{3}{2}\frac{\Theta^3}{p^2l^3}\frac{k^3+1}{(k-1)^3}.$$

Il est facile alors d'obtenir le coefficient de fonctionnement $\frac{\mathrm{R}}{\Theta}$; divisons pour cela, membre à membre, les deux équations (23) et (12); nous aurons

$$(25)\qquad \mathcal{F} = \frac{3}{64}\frac{1}{m^2l}\frac{(k^2+1)(k^3+1)}{k^2(k-1)},$$

qui peut se mettre sous la forme

$$(26)\qquad \mathcal{F} = \frac{3}{2}\frac{\Theta^2}{p^2l^3}\frac{k^3-1}{(k-1)^3}.$$

Enfin la relation entre la longueur du câble et la portée est

$$(27)\qquad \lambda - l = \frac{2}{3}\frac{f_0^2}{l} = \frac{8}{3}m^2l.$$

Telles sont les équations qui lient entre eux les divers éléments d'une transmission télédynamique; elles sont au nombre de dix-sept distinctes, si l'on y comprend la relation $p = \mu g$; et comme le nombre total des inconnues est de vingt-quatre, il reste sept quantités que l'on peut se donner *a priori*.

Le choix des sept quantités que l'on prendra comme variables indépendantes dépendra naturellement du problème particulier que l'on aura à traiter et du but spécial que l'on se proposera d'atteindre. On conçoit en effet, pour n'en citer qu'un exemple, que s'il s'agit d'utiliser un câble

donné, les quantités p, i et δ sont déterminées; tandis que, au contraire, si l'on veut calculer les éléments d'une transmission répondant à certaines conditions, ces quantités font partie des inconnues que l'on cherche. Il est donc nécessaire, dans chaque cas, de fixer tout d'abord les éléments que l'on considère comme fixes avant de mettre en usage les formules que nous venons d'établir.

En général, quand il s'agit d'installer une transmission, les sept quantités que l'on doit considérer comme données sont les éléments k, m, l, N, V, χ et D; en effet, la portée l est alors connue; il en est de même pour le travail transmis N; k et m doivent être compris entre certaines limites que nous déterminerons plus loin; V, qu'il y a intérêt à prendre aussi grand que possible, afin d'obtenir un câble de diamètre plus petit, c'est-à-dire moins cher, ne peut dépasser une valeur maximum fixée par la considération de la force centrifuge; D, qu'il est utile d'augmenter pour diminuer la tension d'incurvation, ne peut cependant, en pratique, être trop considérable; enfin χ doit rester inférieur à une certaine limite, au point de vue de la résistance du câble. Les sept quantités dont nous venons de parler, et que l'on doit regarder comme données dans le cas que nous étudions, ne sont donc pas fixées exactement, et, par suite, la solution que l'on obtient comporte toujours une certaine indétermination ([1]). On profite, dans la pratique, de cette indétermination pour arriver à une solution qui réponde d'une façon aussi satisfaisante que possible aux circonstances spéciales du problème que l'on traite et au point de vue particulier où l'on se place.

Il y aura donc, pour la résolution de toute question relative aux câbles, une discussion à faire sur les valeurs à adopter pour chacune des sept quantités que l'on regardera ensuite comme constantes. Cette discussion, qu'il serait fort difficile de conduire si l'on voulait étudier à la fois l'influence de la variation de ces sept quantités, deviendra facile si l'on examine séparément l'influence de la variation de chacune d'elles. C'est cette

([1]) Il est bien clair que cette remarque reste vraie, quelles que soient les sept quantités prises comme constantes.

analyse que nous allons faire maintenant, en ayant soin, de choisir parmi tous les cas théoriquement possibles, ceux qui se présentent d'ordinaire dans la pratique.

II. — Influence de la variation de la vitesse V, lorsque les éléments k, l, m, p, δ et D restent fixes.

Lorsque V varie, les flèches f_1 et f_2 restent fixes, puisque k et m sont constants [(6) et (7)] [1]; la tension utile Θ ne varie pas, car p, l, m et k sont donnés [(12)]; le travail transmis N varie par suite proportionnellement à V [(13)].

Quant à la tension θ_1 du brin conducteur par millimètre carré, elle augmente quand la vitesse augmente, et la loi de sa variation est connue [(17)].

Enfin, le coefficient de régularité et celui de fonctionnement restent fixes [(23) et (25)].

On a donc, en somme, les résultats consignés dans le Tableau suivant :

TABLEAU N° 2.

V variable.

k, l, m, p, δ et D fixes.

f_0, f_1, f_2, Θ, Ω, σ, i, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}$, λ constants.	$N = \frac{pl}{300m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\left(1-\frac{1}{k}\right)V.$ $\theta_1 = \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{V^2}{114g}.$ $\theta_2 = \frac{l}{456mk}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{V^2}{114g}.$ $\Theta_1 = \frac{pl}{4m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \mu V^2.$ $\Theta_2 = \frac{pl}{4mk}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \mu V^2.$ $\chi = \sigma + \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{V^2}{114g}.$

[1]) Dans tout ce qui suit, les parenthèses entre crochets indiquent les numéros des formules du § I de la deuxième Partie auxquelles il faut se reporter.

Le Tableau qui précède montre que, dans le cas étudié, on peut, sans conséquence fâcheuse pour le fonctionnement, augmenter la vitesse du câble pour augmenter le travail qu'il transmet. Mais l'on est arrêté dans cette voie par deux raisons. Tout d'abord, lorsque la vitesse augmente, la force centrifuge qui en résulte et qui croît proportionnellement au carré de V peut produire la rupture des poulies. D'autre part, la tension χ va en croissant avec V [1], et est ainsi susceptible de dépasser la limite supérieure que permet d'admettre la résistance du câble.

Quant à l'adhérence, elle reste toujours la même lorsque k est supposé constant. Mais il faut, pour établir ce point d'une manière précise, reprendre complètement la question du glissement, ce qui conduit d'ailleurs à modifier, dans le cas des petites tensions et des grandes vitesses, la règle admise aujourd'hui pour rendre le glissement impossible. Il est nécessaire que nous insistions sur ce sujet.

III. — Frottement d'une corde sur un cylindre lorsque tous deux tournent avec une grande vitesse. Condition d'adhérence.

Lorsqu'une corde enroulée sur un cylindre fixe est sur le point de glisser, la relation qui lie la puissance P à la résistance Q est

$$\frac{P}{Q} = e^{fA},$$

A étant l'angle des deux tangentes extrêmes à l'arc embrassé, f le coefficient de frottement au départ, e la base des logarithmes népériens.

Cette formule, qui est rigoureusement exacte quelle que soit la section droite du cylindre, s'établit en écrivant l'équilibre de toutes les forces appliquées à un élément de corde, c'est-à-dire des deux tensions aux extrémités, de la résistance normale du cylindre et du frottement.

(1) On voit en effet, par la formule (17) du § I, que l'influence de la vitesse V sur la tension θ_1 est représentée par le terme $\frac{V^2}{114g}$; les valeurs de ce terme, pour les diverses vitesses usuelles, sont données dans le Tableau n° 3 (paragraphe suivant). On reconnaît, à l'inspection de ce Tableau, que l'influence de la force centrifuge sur la tension est loin d'être négligeable.

La condition d'adhérence à laquelle conduit cette formule

$$\frac{P}{Q} < e^{fA}$$

n'est évidemment pas applicable en toute rigueur au cas où la corde est enroulée sur une poulie qu'elle entraîne, puisque dans ce cas, la corde ayant une certaine vitesse, les forces d'inertie auraient dû intervenir dans les équations d'équilibre. Cependant on l'admet d'une façon générale dans les règles d'établissement des transmissions par courroies, par cordes ou par câbles métalliques.

Cette approximation, qui est bien suffisante en pratique lorsque la transmission ne marche pas très vite, devient inadmissible dans le cas, très fréquent aujourd'hui, des transmissions à grande vitesse. On arrive, en effet, souvent à faire parcourir au lien 25^{m} et jusqu'à 32^{m} par seconde; on peut même, dans certains cas, avec des poulies à jante de fer, atteindre 50^{m}; les forces d'inertie sont alors loin d'être négligeables, et le rapport des tensions peut être inférieur à e^{fA} sans que l'adhérence soit assurée.

La remarque qui précède explique certains mécomptes qui se produisent lorsqu'on installe des câbles à grande vitesse, et montre qu'il est indispensable de tenir compte de la force centrifuge dans l'évaluation de la limite supérieure à fixer pour le rapport des tensions. C'est ce que nous allons faire.

Soit un élément AB d'une corde enroulée suivant la section droite d'un cylindre circulaire de centre O (*fig.* 4). Ce cylindre tourne autour de l'axe O avec une vitesse constante correspondant pour la corde à une vitesse linéaire V. Le glissement est sur le point de se produire de B vers A; T est la tension en B, $T + dT$ la tension en A.

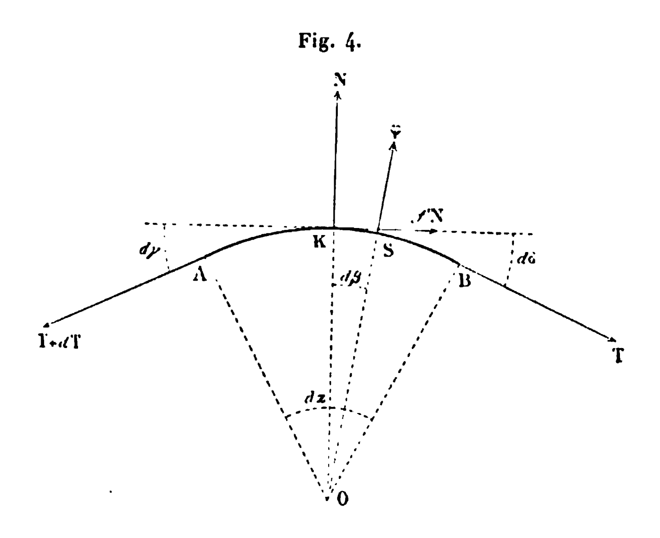
Il y a équilibre entre les tensions T et $T + dT$, la résistance N du cylindre, le frottement fN et les forces d'inertie.

Or la force d'inertie tangentielle est nulle, puisque le mouvement est uniforme; la seule force à considérer en chaque point est donc la force centrifuge qui, pour l'élément AB, donne une résultante φ normale au cy-

lindre et égale à $\mu \frac{V^2}{R} ds$, ou encore à $\frac{p}{g} V^2 d\alpha$, $d\alpha$ étant l'angle de contingence correspondant à AB.

Projetons toutes les forces sur la direction de N et sur celle de fN, afin d'obtenir les deux équations d'équilibre.

Fig. 4.



En représentant par $d\beta$ l'angle de φ et de N, par $d\gamma$ celui de $T + dT$ et de fN, par $d\delta$ celui de T et fN, on a, par la projection sur N,

$$N + \varphi \cos d\beta - (T + dT) \sin d\gamma - T \sin d\delta = 0,$$

ou encore, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$N = T d\alpha - \varphi = \left(T - \frac{p}{g} V^2\right) d\alpha.$$

On obtient de même, par la projection sur fN,

$$(T + dT) \cos d\gamma - T \cos d\delta - \varphi \sin d\beta - f N = 0,$$

qui peut s'écrire

$$dT = f N \quad (^1).$$

---

(1) Le terme $\varphi \sin d\beta$ disparaît, car φ, égal à $\frac{p}{g} V^2 d\alpha$, est du premier ordre.

Éliminons N entre les deux équations d'équilibre, nous aurons

$$\frac{dT}{T - \frac{p}{g}V^2} = f d\alpha,$$

d'où l'on déduit, en désignant par Θ_1 la tension du brin moteur en son point d'enroulement sur le cylindre et par Θ_2 celle du brin conduit,

$$\frac{\Theta_1 - \frac{p}{g}V^2}{\Theta_2 - \frac{p}{g}V^2} = e^{fA},$$

A étant l'angle total correspondant à l'arc embrassé.

C'est donc la quantité

$$\frac{\Theta_1 - \frac{p}{g}V^2}{\Theta_2 - \frac{p}{g}V^2}$$

qui doit rester plus petite que e^{fA} pour que le glissement ne soit pas à craindre.

Cette expression peut se mettre sous une autre forme plus commode pour les applications, en ce sens qu'elle ne contient plus le poids par mètre courant, variable d'une corde à l'autre.

Pour cela, remarquons que Θ_1 et Θ_2, étant les tensions totales exercées aux extrémités de l'arc enroulées, peuvent s'écrire $\Omega\theta_1$ et $\Omega\theta_2$. On a, par suite,

$$\frac{\Theta_1 - \frac{p}{g}V^2}{\Theta_2 - \frac{p}{g}V^2} = \frac{\theta_1 - \frac{pV^2}{\Omega g}}{\theta_2 - \frac{pV^2}{\Omega g}} = \frac{\theta_1 - \frac{V^2\Delta}{1000g}}{\theta_2 - \frac{V^2\Delta}{1000g}},$$

Δ étant la densité moyenne du câble (¹), rapportée à la section en fer.

(¹) En effet, Ω étant exprimé en millimètres carrés, le poids du câble par mètre courant est, en grammes, représenté par $\Omega\Delta$; or, p étant exprimé en kilogrammes, on a

$$1000p = \Omega\Delta,$$

d'où l'expression dont nous nous sommes servi

$$\frac{p}{\Omega} = \frac{\Delta}{1000}.$$

Si l'on veut appliquer le résultat précédent au cas des câbles télédynamiques, on doit remplacer la quantité $\frac{\Delta}{1000}$ par sa valeur. Or cette valeur varie naturellement avec la quantité de chanvre que contient le câble; elle serait de $\frac{1}{124}$ environ s'il était tout en fer; M. Reuleaux admet implicitement, dans les formules qu'il donne au sujet des câbles (¹), qu'elle est en moyenne de $\frac{1}{114}$; enfin M. Achard (²), prend le chiffre de $\frac{1}{104}$ comme résultant de mesures exactes faites sur divers échantillons. Nous remarquerons que la quantité $\frac{\Delta}{1000}$ peut, dans certaines circonstances, atteindre $\frac{1}{96}$ (³), et, afin de rendre plus facile le calcul du terme $\frac{V^2\Delta}{1000g}$ dans les différents cas qui se peuvent présenter, nous réunirons dans le Tableau suivant les valeurs qu'il prend pour des vitesses variant de 5^m à 50^m et pour les diverses valeurs que peut avoir $\frac{\Delta}{1000}$.

(¹) Reuleaux, *le Constructeur;* 2ᵉ édition française, p. 593 et suivantes.

(²) Achard, *De la transmission et de la distribution des forces motrices à grande distance*, p. 16.

(³) M. Achard, dans le travail précédemment cité, donne les chiffres suivant :

Transmission de Bellegarde..................	$\frac{\Delta}{1000} = \frac{1}{100}$.
Transmission d'Oberursel..................	$\frac{\Delta}{1000} = \frac{1}{107}$.
Transmissions de Schaffouse..............	$\frac{\Delta}{1000} = \frac{1}{100}$, $\frac{\Delta}{1000} = \frac{1}{97}$.
Transmissions de Fribourg................	$\frac{\Delta}{1000} = \frac{1}{102}$, $\frac{\Delta}{1000} = \frac{1}{110}$, $\frac{\Delta}{1000} = \frac{1}{103}$.

TABLEAU N° 3.

Valeurs du terme de correction $\frac{V^2\Delta}{1000g}$ qui figure dans la condition d'adhérence

$$\frac{\theta_1 - \frac{V^2\Delta}{1000g}}{\theta_2 - \frac{V^2\Delta}{1000g}} < e^{fA}.$$

Valeurs de V.	$\frac{\Delta}{1000} = \frac{1}{96}$.	$\frac{\Delta}{1000} = \frac{1}{100}$.	$\frac{\Delta}{1000} = \frac{1}{104}$.	$\frac{\Delta}{1000} = \frac{1}{114}$.	$\frac{\Delta}{1000} = \frac{1}{124}$.
m	kg	kg	kg	kg	kg
5	0,026	0,025	0,024	0,022	0,021
10	0,106	0,102	0,098	0,089	0,082
15	0,239	0,229	0,221	0,201	0,185
20	0,425	0,408	0,392	0,358	0,329
25	0,664	0,637	0,613	0,559	0,514
30	0,956	0,918	0,882	0,805	0,740
35	1,301	1,249	1,201	1,096	1,007
40	1,699	1,632	1,568	1,432	1,316
45	2,151	2,025	1,944	1,782	1,701
50	2,655	2,548	2,452	2,236	2,056

La condition d'adhérence à laquelle nous sommes parvenu dans le cas des câbles s'exprime très simplement en fonction du rapport des flèches. En effet, d'après les équations (17) et (18) du § I, on a

$$\frac{\theta_1 - \frac{V^2\Delta}{1000g}}{\theta_2 - \frac{V^2\Delta}{1000g}} = k = \frac{f_2}{f_1};$$

la condition d'adhérence est donc que le rapport des flèches *et non le rapport des tensions, comme on l'admet d'ordinaire,* soit inférieur à e^{fA}.

La relation qui lie ces deux rapports est d'ailleurs facile à obtenir; on a, en effet, par l'équation précédente, en représentant $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ par k_θ,

$$k_\theta = \frac{k}{1 + (k-1)\frac{V^2\Delta}{1000g}\frac{1}{\theta_1}}.$$

La condition d'adhérence

$$k < e^{fA},$$

peut dès lors s'écrire

$$k_\theta < \frac{e^{fA}}{1 + \frac{V^2 \Delta}{1000 g}(e^{fA} - 1)\frac{1}{\theta_1}}.$$

Il faudra, dans chaque cas, connaître l'angle A d'enroulement pour appliquer cette condition. Nous allons indiquer comment cet angle peut être déterminé.

IV. — Détermination de l'angle d'enroulement dans les transmissions télédynamiques. — Limites supérieures a admettre pour le rapport des flèches.

Dans les transmissions par courroies, lorsque les deux poulies extrêmes sont égales, les deux brins sont très voisins du parallélisme, et l'on peut admettre que A est égal à $0,95\pi$ pour tenir compte de la raideur.

Le coefficient de frottement étant alors égal à 0,25, il en résulte pour e^{fA} la valeur 2,109, et l'adhérence est dès lors assurée si l'on prend pour k la valeur 2.

Mais, dans le cas des câbles, les deux brins pendant le mouvement font un angle qui a pour effet de modifier l'angle d'enroulement, de le diminuer si le brin moteur est au-dessus du brin conduit, de l'augmenter s'il est au-dessous.

Or la tangente au brin, au point d'enroulement, faisant avec la corde de l'arc sous-tendu un angle égal à $\frac{2f}{l}$, on a

$$A = \pi \pm 2\frac{f_2 - f_1}{l},$$

et, en remplaçant f_2 et f_1 par leurs valeurs,

$$A = \pi \pm 4m(k-1)\sqrt{\frac{2}{1+k^2}};$$

la modification produite sur A par le non-parallélisme des brins est donc d'autant plus grande que k et m sont plus grands.

Et comme le rapport des flèches k est généralement pris, au plus, égal à 2, on pourra, dans la pratique, admettre comme limites de A

$$A = (0,95 \pm 0,76 m)\pi,$$

dans laquelle on a introduit le coefficient 0,95 pour tenir compte de la raideur.

Comme il peut être important, dans certains cas, d'avoir la valeur exacte de A, suivant la valeur de k, nous avons établi le Tableau n° 4, qui donne l'angle d'enroulement, abstraction faite de la raideur, pour les diverses valeurs de m que l'on peut employer et les différentes valeurs de k.

TABLEAU N° 4.

Valeurs de l'angle d'enroulement.

k.	m					
	$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{20}$.	$\frac{1}{30}$.	$\frac{1}{40}$.	$\frac{1}{100}$.
BRIN MENANT AU-DESSUS DU BRIN CONDUIT.						
1,5............	$0,95\pi$	$0,97\pi$	$0,975\pi$	$0,98\pi$	$0,99\pi$	$0,995\pi$
2,0............	$0,92\pi$	$0,94\pi$	$0,96\pi$	$0,97\pi$	$0,98\pi$	$0,99\pi$
2,5............	$0,90\pi$	$0,93\pi$	$0,95\pi$	$0,97\pi$	$0,975\pi$	$0,99\pi$
BRIN MENANT AU-DESSOUS DU BRIN CONDUIT.						
1,5............	$1,05\pi$	$1,03\pi$	$1,025\pi$	$1,02\pi$	$1,01\pi$	$1,005\pi$
2,0............	$1,08\pi$	$1,05\pi$	$1,04\pi$	$1,03\pi$	$1,02\pi$	$1,01\pi$
2,5............	1.10π	$1,07\pi$	$1,05\pi$	$1,03\pi$	$1,025\pi$	$1,01\pi$

On voit par ce Tableau que, lorsque le brin menant est au-dessus du brin conduit, le glissement est d'autant plus facile à produire que m est plus grand. Et comme, ainsi que nous le démontrerons dans la suite, la valeur de m doit habituellement être prise plus grande quand la portée est plus petite, il en résulte que les câbles courts adhèrent en général moins au poulies, toutes choses égales d'ailleurs, que les câbles longs.

Les valeurs que nous venons de trouver pour l'angle d'enroulement A permettent de calculer la quantité e^{fA} limite supérieure du rapport des flèches k. Afin de faciliter les calculs, nous avons réuni dans le Ta-

bleau n° 5 les valeurs du coefficient de frottement résultant de la formule

$$k = e^{f\lambda},$$

d'où l'on tire

$$f = \frac{\text{Lnép}\,k}{\pi \pm 4m(k-1)\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}}.$$

TABLEAU N° 5.

Coefficient de frottement correspondant au glissement pour des valeurs déterminées du rapport des flèches et de la flèche relative au repos.

k.	m					
	$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{20}$.	$\frac{1}{30}$.	$\frac{1}{40}$.	$\frac{1}{100}$.
	BRIN MENANT AU-DESSUS DU BRIN CONDUIT.					
1,6......... ...	0,159	0,156	0,154	0,152	0,151	0,150
1,7.............	0,180	0,176	0,175	0,173	0,172	0,170
1,8.............	0,201	0,196	0,194	0,192	0,190	0,188
1,9.............	0,221	0,214	0,212	0,210	0,208	0,206
2,0.............	0,241	0,233	0,230	0,227	0,225	0,223
2,1.............	0,258	0,250	0,248	0,243	0,242	0,238
2,2.............	0,275	0,267	0,262	0,259	0,256	0,253
2,3.............	0,292	0,283	0,278	0,274	0,271	0,268
2,4.............	0,308	0,297	0,292	0,288	0,285	0,281
2,5.............	0,324	0,313	0,307	0,302	0,300	0,294
2,6.......	0.338	0,327	0,320	0,315	0,312	0,307
	BRIN MENANT AU-DESSOUS DU BRIN CONDUIT.					
1,6..	0,141	0,144	0,146	0,147	0,148	0,149
1,7.............	0,159	0,162	0,164	0,165	0,166	0,168
1,8.............	0,175	0,179	0,181	0,183	0,184	0,186
1,9.............	0,190	0,195	0,197	0,199	0,200	0,203
2,0.............	0,204	0,209	0,212	0,215	0,217	0,219
2,1.............	0,217	0,224	0,226	0,230	0,231	0,234
2,2.............	0,230	0,236	0,240	0,243	0,245	0,248
2,3.............	0,243	0,249	0,253	0,257	0,259	0,263
2,4.............	0,254	0,262	0,266	0,270	0,271	0,276
2,5............	0,266	0,274	0,278	0,282	0,284	0,289
2,6.............	0,276	0,284	0,289	0,294	0,296	0,301

Les câbles employés dans l'industrie étant généralement recouverts d'un

enduit, le coefficient de frottement est supérieur à 0,20, et est compris d'ordinaire entre 0,25 et 0,30. La limite supérieure à admettre pour k est, dès lors, plus grande que 2, et l'on peut, en conséquence, admettre comme règle pratique que, le rapport des flèches étant inférieur ou égal à 2, l'adhérence est assurée.

La formule établie à la fin du paragraphe précédent,

$$k_\theta = \frac{k}{1+(k-1)\frac{V^2\Delta}{1000g}\frac{1}{\theta_1}},$$

montre que le rapport des tensions diffère toujours du rapport des flèches, qu'il lui est toujours inférieur, et que la différence augmente quand la vitesse croît ou quand la tension θ_1 diminue.

Si l'on se donne une valeur de θ_1 que l'on ne veuille pas dépasser, il y a une limite maxima pour la vitesse, puisque k_θ doit être plus grand que l'unité; cette limite est [1]

$$V < \sqrt{\frac{\theta_1}{\frac{\Delta}{1000g}}}.$$

Il est clair d'ailleurs que, la vitesse maxima réalisable en pratique étant de 50^m, on n'aura à tenir compte de la limite précédente que dans le cas où

$$\sqrt{\frac{\theta_1}{\frac{\Delta}{1000g}}} < 50.$$

Nous reviendrons plus loin sur ce sujet.

---

[1] On a

$$(k-1)\left(1-\frac{V^2\Delta}{1000g}\frac{1}{\theta_1}\right) > 1,$$

et, k étant supérieur à l'unité, on en déduit

$$V < \sqrt{\frac{\theta_1}{\frac{\Delta}{1000g}}}.$$

Le Tableau n° 6 donne les valeurs du rapport $\frac{k_1}{k}$ pour les principales circonstances qui peuvent se présenter dans la pratique, et permet ainsi d'avoir immédiatement le rapport des tensions quand on connaît le rapport des flèches.

Il faut observer ici que, la quantité k_1 devant être plus grande que l'unité, le rapport $\frac{k_1}{k}$ doit être supérieur à $\frac{1}{k}$; le minimum de cette expression est donc $\frac{1}{1,5}$ ou $\frac{2}{3}$ pour k égal à 1,5, $\frac{1}{2}$ pour k égal à 2 et $\frac{1}{2,5}$ ou $\frac{2}{5}$ pour k égal à 2,5. On a dès lors, dans le Tableau n° 6, remplacé par des guillemets les valeurs de $\frac{k_1}{k}$ inférieures aux limites qui viennent d'être indiquées.

On voit par le Tableau suivant que, ainsi que nous l'avons dit plus haut, le rapport $\frac{k_1}{k}$ est d'autant plus petit que la vitesse est plus grande et que la tension θ_1 est plus petite; d'autre part, nous reconnaîtrons dans la suite de ce travail que θ_1 doit, en général, diminuer avec la portée. C'est donc principalement dans le cas des petites portées qu'il est important de remplacer l'ancienne condition d'adhérence par celle que nous avons indiquée précédemment, surtout quand la vitesse est un peu considérable.

TABLEAU N° 6.

Valeur du rapport $\frac{k_0}{k}$ pour les diverses valeurs de V et de θ (¹).

k.	θ_1.	V 5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.
1,5	0,2	0,94	0,80	»	»	»	»	»	»	»	»
	0,4	0,97	0,89	0,78	0,67	»	»	»	»	»	»
	0,6	0,98	0,92	0,84	0,75	»	»	»	»	»	»
	0,8	0,98	0,94	0,87	0,80	0,72	»	»	»	»	»
	1,0	0,98	0,95	0,90	0,83	0,76	0,69	»	»	»	»
	2,0	0,99	0,97	0,94	0,91	0,86	0,81	0,76	0,71	0,67	»
	4,0	0,99	0,98	0,97	0,95	0,92	0,90	0,86	0,83	0,80	0,76
	6,0	0,99	0,99	0,98	0,96	0,95	0,93	0,90	0,88	0,85	0,83
	8,0	0,99	0,99	0,98	0,97	0,96	0,94	0,93	0,91	0,88	0,86
	10,0	0,99	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,93	0,92	0,90	0,88
	12,0	0,99	0,99	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,93	0,92	0,90
	15,0	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93
2,0	0,2	0,89	0,67	»	»	»	»	»	»	»	»
	0,4	0,94	0,80	0,64	0,50	»	»	»	»	»	»
	0,6	0,96	0,86	0,73	0,60	»	»	»	»	»	»
	0,8	0,97	0,89	0,78	0,67	0,56	»	»	»	»	»
	1,0	0,97	0,91	0,82	0,72	0,62	0,53	»	»	»	»
	2,0	0,98	0,95	0,90	0,83	0,76	0,69	0,66	0,56	0,50	»
	4,0	0,99	0,97	0,94	0,91	0,86	0,81	0,79	0,71	0,67	0,62
	6,0	0,99	0,98	0,96	0,93	0,90	0,87	0,85	0,79	0,75	0,71
	8,0	0,99	0,98	0,97	0,95	0,93	0,90	0,88	0,83	0,80	0,76
	10,0	0,99	0,99	0,97	0,96	0,94	0,91	0,90	0,86	0,83	0,80
	12,0	0,99	0,99	0,98	0,96	0,95	0,93	0,92	0,88	0,86	0,83
	15,0	0,99	0,99	0,98	0,97	0,96	0,94	0,93	0,90	0,88	0,86
2,5	0,2	0,84	0,57	»	»	»	»	»	»	»	»
	0,4	0,91	0,73	0,54	0,40	»	»	»	»	»	»
	0,6	0,94	0,80	0,64	0,50	»	»	»	»	»	»
	0,8	0,95	0,84	0,71	0,57	0,46	»	»	»	»	»
	1,0	0,96	0,87	0,76	0,63	0,52	0,43	»	»	»	»
	2,0	0,98	0,93	0,85	0,77	0,68	0,60	0,52	0,46	»	»
	4,0	0,99	0,96	0,92	0,87	0,81	0,76	0,68	0,63	0,57	0,52
	6,0	0,99	0,97	0,94	0,91	0,86	0,81	0,75	0,71	0,66	0,62
	8,0	0,99	0,98	0,96	0,93	0,89	0,85	0,82	0,77	0,72	0,68
	10,0	0,99	0,98	0,97	0,94	0,91	0,88	0,84	0,81	0,77	0,72
	12,0	0,99	0,98	0,97	0,95	0,92	0,90	0,86	0,83	0,80	0,76
	15,0	0,99	0,99	0,97	0,96	0,94	0,92	0,89	0,86	0,83	0,80

(¹) Ce Tableau a été calculé en prenant pour $\frac{\Delta}{1000}$ la valeur $\frac{1}{104}$, afin d'avoir une valeur moyenne de $\frac{k_0}{k}$.

On a admis comme limites extrêmes de la tension θ_1 $0^{kg},200$ et 15^{kg}. Ce dernier chiffre n'est, en effet, jamais dépassé dans la pratique, et n'est même atteint que dans des cas exceptionnels.

V. — Limites maxima que l'on peut atteindre pour la vitesse d'un cable, dans le cas des petites tensions.

Nous avons dit, au paragraphe précédent, que la vitesse maxima fournie par la condition

$$k_\theta > 1$$

était donnée par

$$V < \sqrt{\frac{\theta_1}{\left(\frac{\Delta}{1000g}\right)}},$$

et nous avons fait remarquer qu'il n'y avait à tenir compte de ce maximum de vitesse que dans le cas où

$$\sqrt{\frac{\theta_1}{\left(\frac{\Delta}{1000g}\right)}} < 50.$$

Si l'on suppose $\frac{\Delta}{1000}$ égal à $\frac{1}{104}$, on déduit de là

$$\theta_1 < 2^{kg},450.$$

Le Tableau n° 7 donne les valeurs du maximum de vitesse, selon les valeurs de θ_1.

TABLEAU N° 7.

Limites maxima à admettre pour la vitesse d'un câble dans le cas des petites tensions.

	θ_1											
	0kg,2.	0kg,4.	0kg,6.	0kg,8.	1kg,0.	1kg,2.	1kg,4.	1kg,6.	1kg,8.	2kg,0.	2kg,2.	2kg,4.
V.....	14m,3	20m,1	24m,7	28m,6	31m,9	35m,0	37m,7	40m,4	42m,8	45m,1	47m,3	49m,4

Lorsque, pour une tension θ_1 donnée, la vitesse du câble atteindra la va-

leur inscrite dans le Tableau précédent comme correspondant à cette tension, le travail transmis par ce câble deviendra nul, puisque k_0 sera alors égal à l'unité, c'est-à-dire puisque les tensions des deux brins seront égales.

C'est là une remarque importante à faire, car on serait tenté de croire *a priori* que l'on augmente toujours le travail, lorsque, pour une même valeur de la tension θ_1, on augmente la vitesse.

Il est d'ailleurs facile de voir que, dans le voisinage de la limite dont il s'agit, le travail transmis cesse absolument d'être proportionnel à la vitesse. On a, en effet,

$$[(17)] \qquad \theta_1 = \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{V^2}{114g},$$

$$[(12 \text{ et } 13)] \qquad N = \frac{pVl}{300m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\,\frac{k-1}{k}.$$

On tire de là, en éliminant k entre ces deux équations,

$$N = 1,52p\left(\theta_1 - \frac{V^2}{114g}\right)\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{2\times\overline{456}^2 m^2}{l^2}\left(\theta_1 - \frac{V^2}{114g}\right)^2 - 1}}\right]V,$$

et l'on doit, dans cette formule, considérer p, m et θ_1 comme constants, V étant la seule variable.

L'expression de N peut se mettre sous une forme plus commode, au point de vue de la discussion. Pour cela, désignons par θ_0 la tension commune aux deux brins lorsqu'ils sont au repos ; cette tension s'obtiendra en faisant, dans la valeur de θ_1, V égal à zéro et k égal à l'unité ; on aura donc

$$\theta_0 = \frac{l}{456m},$$

et, par suite,

$$N = 1,52p\left(\theta_1 - \frac{V^2}{114g}\right)\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\theta_0^2}\left(\theta_1 - \frac{V^2}{114g}\right)^2 - 1}}\right]V.$$

Cette valeur du travail montre qu'il n'est pas proportionnel à la vitesse,

et qu'il devient nul pour les deux valeurs

$$V_1 = \sqrt{114g(\theta_1 - \theta_0)},$$
$$V_2 = \sqrt{114g\theta_1}.$$

Cette dernière vitesse correspond, ainsi que nous l'avons dit dans la Note de la page 77, au cas où l'on a

$$k_0 = 1, \quad k > 1.$$

Quant à la première vitesse V_1, remarquons que, si l'on porte la valeur de θ_1 qui lui correspond,

$$\theta_1 \theta_0 + = \frac{V_1^2}{114g},$$

dans la formule [(17)], qui peut s'écrire

$$\theta_1 = \theta_0 \sqrt{\frac{1+k^2}{2} + \frac{V_1^2}{114g}},$$

il en résulte que k est égal à l'unité.

On voit d'ailleurs, par les formules [(17)] et [(18)], que θ_1 est alors égal à θ_2.

Ainsi donc la vitesse V_1 correspond au cas où l'on a

$$k_0 = 1, \quad k = 1.$$

Il est clair que des deux vitesses V_1 et V_2 la première seule est réalisable en pratique. En effet, si l'on se reporte à l'expression de θ_1 rappelée plus haut, on reconnaît que le premier terme représente l'action de la pesanteur et le second celle de la force centrifuge; la vitesse V_2, égale à $\sqrt{114g\theta_1}$, est donc la vitesse qui serait capable à elle seule de produire une tension égale à θ_1 par suite de la force centrifuge, et elle est dès lors impossible à obtenir, puisqu'il faudrait annuler l'action de la pesanteur. La véritable limite de la vitesse pour un câble donné, c'est-à-dire pour un câble dont on connaît la portée et la flèche relative au repos, est donc celle qui rend k égal à l'unité, c'est-à-dire

$$V_1 = \sqrt{114g(\theta_1 - \theta_0)}.$$

VI. — Influence de la variation du diamètre δ des fils, lorsque les éléments k, m, l, i, D, θ_1 restent fixes.

Dans ce cas f_0 est constant [(1)], ainsi que les quantités f_1 [(6)], f_2 [(7)], V [(17)], θ_2 [(18)], $\mathfrak{I}$ [(25)], λ [(27)].

Ω et p varient proportionnellement à δ^2 [(20) et (21)]; Θ varie comme p [(12)], donc proportionnellement à δ^2; il en est de même pour N [(13)] et pour $\mathfrak{R}$ [(22)]. Quant à Θ_1, il peut s'écrire $p\left(\frac{V^2}{g} + \frac{l}{4m}\sqrt{1+k^2}\right)$ [(10)], c'est-à-dire qu'il est proportionnel à δ^2, et la même conclusion s'applique évidemment à Θ_2 [(11)].

Enfin σ est proportionnel à δ [(19)] et, par suite, χ augmente avec δ [(4)].

Ces divers résultats sont résumés dans le Tableau suivant :

TABLEAU N° 8.

δ variable.

k, l, m, i, D, θ_1 fixes.

f_0, f_1, f_2, V, θ_2, $\mathfrak{I}$, λ	constantes.	σ proportionnel à δ.	Ω, p, Θ, N, $\mathfrak{R}$, Θ_1, Θ_2	proportionnels à δ^2.	$\chi = \theta_1 + \sigma$.

Remarquons ici que la quantité χ augmentant avec δ peut, par suite, dépasser la limite maxima que comporte la résistance du câble.

Il en résulte que l'on ne peut accroître outre mesure le diamètre des fils dans le cas que nous étudions. La valeur maximum de ce diamètre est d'ailleurs facile à obtenir; on tire, en effet, de l'équation [(4)], χ' étant la limite supérieure admise pour χ,

$$\delta_1 = \chi' - \theta_1,$$

comme valeur maxima de σ.

Mais on déduit de là et de [(19)]

$$\delta_1 = \frac{(\chi' - \theta_1)D}{20000},$$

qui représente la plus grande valeur admissible pour le diamètre des fils correspondant à une tension θ_1 et à un diamètre de poulie donnés.

Nous avons inscrit, dans le Tableau n° 9, les diamètres maxima, exprimés en millimètres, auxquels conduit cette formule, pour les diverses valeurs de θ_1, de D et de χ'.

Dans les circonstances que nous venons d'étudier, l'augmentation du diamètre des fils au delà des limites fixées dans le Tableau suivant peut, par l'accroissement correspondant de χ, entraîner des tensions dangereuses pour le câble; aussi, dans la pratique, se donne-t-on d'ordinaire *a priori* la valeur de χ au lieu de celle de θ_1. Nous allons examiner ce cas.

TABLEAU N° 9.

Diamètre maximum des fils que l'on peut employer [1].

LIMITE ADMISE pour χ.	θ_1.	D 1m.	1m,50.	2m.	2m,50.	3m.	3m,50.	4m.	4m,50.	5m.	5m,50.	6m.
	kg 0,000	mm 0,90	mm 1,35	mm 1,80	mm 2,25	mm 2,70	mm 3,15	mm 3,60	mm 4,05	mm 4,50	mm 4,95	mm 5,40
	0,200	0,89	1,33	1,78	2,22	2,67	3,11	3,56	4,00	4,45	4,90	5,34
	0,400	0,88	1,31	1,76	2,20	2,64	3,08	3,52	3,96	4,40	4,85	5,28
	0,600	0,87	1,30	1,74	2,17	2,61	3,04	3,48	3,91	4,35	4,79	5,22
	0,800	0,86	1,28	1,72	2,15	2,58	3,01	3,44	3,87	4,30	4,74	5,16
	1,000	0,85	1,27	1,70	2,12	2,55	2,97	3,40	3,82	4,25	4,68	5,10
18kg...........	2,000	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4,00	4,40	4,80
	4,000	0,70	1,05	1,40	1,75	2,10	2,45	2,80	3,15	3,50	3,85	4,20
	6,000	0,60	0,88	1,20	1,47	1,77	2,10	2,60	2,70	3,00	3,31	3,54
	8,000	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00
	10,000	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20	2,40
	12,000	0,30	0,45	0,60	0,75	0,90	1,05	1,20	1,35	1,50	1,65	1,80
	15,000	0,15	0,23	0,30	0,38	0,45	0,53	0,60	0,68	0,75	0,83	0,90
	0,000	0,75	1,13	1,50	1,88	2,25	2,63	3,00	3,28	3,75	4,13	4,50
	0,200	0,74	1,11	1,48	1,85	2,22	2,59	2,96	3,33	3,70	4,07	4,44
	0,400	0,73	1,09	1,46	1,83	2,19	2,56	2,92	3,29	3,65	4,02	4,38
	0,600	0,72	1,08	1,44	1,80	2,16	2,52	2,88	3,24	3,60	3,96	4,32
	0,800	0,71	1,06	1,42	1,78	2,13	2,49	2,84	3,20	3,55	3,91	4,26
15kg...........	1,000	0,70	1,05	1,40	1,75	2,10	2,45	2,80	3,15	3,50	3,85	4,20
	2,000	0,65	0,97	1,30	1,63	1,95	2,28	2,60	2,93	3,25	3,58	3,90
	4,000	0,55	0,82	1,10	1,38	1,65	1,93	2,20	2,48	2,75	3,03	3,30
	6,000	0,45	0,66	0,90	1,10	1,32	1,53	1,80	2,03	2,25	2,48	2,64
	8,000	0,35	0,52	0,70	0,88	1,05	1,23	1,40	1,58	1,75	1,93	2,10
	10,000	0,25	0,37	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,13	1,25	1,38	1,50
	12,000	0,15	0,22	0,30	0,38	0,45	0,53	0,60	0,68	0,75	0,83	0,90
	0,000	0,60	0,90	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3,00	3,30	3,60
	0,200	0,59	0,89	1,18	1,48	1,77	2,07	2,36	2,66	2,96	3,25	3,54
	0,400	0,58	0,87	1,16	1,45	1,74	2,03	2,32	2,61	2,90	3,19	3,48
	0,600	0,57	0,86	1,14	1,43	1,71	2,00	2,28	2,57	2,85	3,14	3,42
	0,800	0,56	0,84	1,12	1,40	1,68	1,96	2,24	2,52	2,80	3,08	3,36
12kg...........	1,000	0,55	0,83	1,10	1,38	1,65	1,93	2,20	2,48	2,75	3,03	3,30
	2,000	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00
	4,000	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20	2,40
	6,000	0,30	0,45	0,60	0,75	0,90	1,05	1,20	1,35	1,50	1,65	1,80
	8,000	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
	10,000	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60

[1] Le diamètre des fils reste compris, en général, entre $0^{mm},5$ et $2^{mm},5$.

VII. — Influence de la variation du diamètre δ des fils, lorsque les éléments k, l, m, i, D, χ restent fixes.

La flèche au repos f_0 est alors constante [(1)]; il en est de même des quantités f_1[(6)], f_2[(7)], s[(25)], λ[(27)].

Le poids du câble par mètre courant varie comme δ^2[(21)]; Ω et Θ, qui sont proportionnels à p, varient donc comme δ^2[(15) et [(12)]; σ est proportionnel à δ[(19)] et, par suite, θ_1 diminue quand δ augmente [(4)]. On a d'ailleurs, par les formules [(19)] et [(4)],

$$\theta_1 = \chi - \frac{20000\delta}{D}.$$

En portant cette valeur dans l'équation [(17)], on trouve

$$V^2 = 114g\left[\chi - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} - \frac{20\,000\delta}{D}\right],$$

et l'on voit que V doit diminuer quand δ augmente.

Quant à Θ_1, il est donné par l'expression

[(17) et (15)] $$\Theta_1 = 114p\left(\chi - \frac{20000\delta}{D}\right);$$

les deux facteurs varient en sens contraire et Θ_1 passe, par suite, par un maximum.

La valeur de θ_2 s'obtient aisément, en remplaçant V par sa valeur dans la formule [(18)]; on a

$$\theta_2 = \chi - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k_2}{2}}\left(1-\frac{1}{k}\right) - \frac{20000\delta}{D}$$

et θ_2 varie en sens inverse de δ.

Θ_2 devient alors, d'après cette formule, et en vertu des relations [(18)] et [(15)],

$$\Theta_2 = 114p\left[\chi - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\left(1-\frac{1}{k}\right) - \frac{20000\delta}{D}\right],$$

et il résulte de là que cette quantité passe par un maximum.

Enfin, N étant égal à $\frac{V\Theta}{75}$, on en déduit, en remplaçant p par $\frac{i}{145}\delta^2[(21)]$,

$$N = \frac{1}{1300}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{1+k^2}{2}\,\frac{il}{m}}\,\delta^2\sqrt{\chi - \frac{l}{456\,m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} - \frac{200000\delta}{D}};$$

N passe donc aussi par un maximum ([1]).

On en conclut que, pour une même poulie, il y a toujours deux câbles ayant le même nombre de fils et susceptibles de transmettre le même travail, pour une même valeur des quantités k, l, m et χ : l'un, plus lourd, mais formé de fils plus gros et donnant lieu, par suite, à une tension d'incurvation plus forte; l'autre, plus léger et constitué par des fils plus fins.

Le coefficient de régularité $\mathcal{R}$ varie comme p, c'est-à-dire comme $\delta^2[(23)]$; quant au coefficient de fonctionnement $\mathcal{F}$, nous avons dit qu'il restait fixe. A ce dernier point de vue, les deux câbles dont nous venons de parler sont donc équivalents. On choisira par suite le plus lourd, si l'on veut que la régularité soit plus grande, c'est-à-dire si l'on veut enfermer la vitesse dans des limites plus étroites quand le travail résistant vient à varier. On prendra, au contraire, le second si une régularité absolue très grande n'est pas nécessaire, et si l'on peut se laisser guider par la seule considération d'économie.

([1]) Il est facile de reconnaître que ce maximum de N est donné par la valeur suivante de δ :

$$\delta = \frac{D\left(456\chi m - l\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\right)}{11400000\,m}.$$

TABLEAU N° 10.

δ variable.

k, l, m, i, D, χ fixes.

f_0, f_1, f_2, $\mathcal{F}$, λ const. | σ prop. à δ. | p, Ω, Θ, $\mathcal{R}$ prop. à δ^2.

$$\theta_1 = \chi - \frac{20000\delta}{D}.$$

$$\theta_2 = \chi - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\left(1-\frac{1}{k}\right) - \frac{20000\delta}{D}.$$

$$\Theta_1 = \frac{114 i\delta^2}{145}\left(\chi - \frac{20000\delta}{D}\right).$$

$$\Theta_2 = \frac{114 i\delta^2}{145}\left[\chi - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\left(1-\frac{1}{k}\right) - \frac{20000\delta}{D}\right].$$

$$V = 33,44\sqrt{\chi - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} - \frac{20000\delta}{D}}.$$

$$N = \frac{1}{1300}\left(1-\frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\,\frac{il}{m}\delta^2\sqrt{\chi - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} - \frac{20000\delta}{D}}.$$

VIII. — Influence de la variation de k, lorsque les éléments, l, m, p, i, χ, V restent fixes.

La quantité f_0 est constante [(1)], ainsi que δ [(21)], Ω [(15)], λ [(27)]. Les flèches f_1 et f_2 restent proportionnelles à $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ et $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ [(4) et (5)]. Θ et N varient comme $\left(1-\frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}$ [(12) et (13)]; $\mathcal{R}$ comme $(1+k^2)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{k^3}\right)$ [(23)]; $\mathcal{F}$ comme $\frac{(k^2+1)(k^3+1)}{k^2(k-1)}$ [(25)]; θ_1 augmente avec k et est donné par la formule [(17)]; θ_2 diminue au contraire et est fourni par la formule [(18)]; il en est de même pour Θ_1 et Θ_2, qui résultent des formules [(10) et (11)].

La valeur de σ obtenue à l'aide des relations [(4) et (17)] est

$$\sigma = \chi - \frac{V^2}{114g} - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}};$$

δ augmente donc quand k diminue et, par suite, d'après l'équation [(19)], D croît avec k. On obtient d'ailleurs, en remplaçant dans l'équation [(19)]

σ par la valeur précédente et δ par sa valeur $\sqrt{\frac{145p}{i}}$, tirée de [(21)] :

$$D = \frac{240\,832}{\chi - \frac{V^2}{114g} - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}\sqrt{\frac{p}{i}}.$$

Le tableau n° 11 (page suivante) donne, pour les diverses valeurs de k, les valeurs des différents coefficients que nous venons de rencontrer.

La discussion des valeurs de $\mathfrak{R}$ et de $\mathfrak{I}$ montre que la régularité va constamment en croissant avec k (1) et que le coefficient de fonctionnement présente un minimum pour k égal à 1,87 (2). La valeur de ce minimum est $11,14\,\frac{3}{64}\,\frac{1}{m^2 l}$, soit $0,52\,\frac{1}{m^2 l}$.

---

(1) La dérivée de $\mathfrak{R}$ est en effet

$$\frac{3}{256\sqrt{2}}\,\frac{p}{m^3} \times \frac{3\sqrt{1+k^2}\,(k^8-1)}{k^4},$$

quantité essentiellement positive, puisque k est plus grand que l'unité.

(2) La dérivée de $\mathfrak{I}$ est

$$\frac{3}{64}\,\frac{1}{m^2 l}\,\frac{2k^6 - 3k^5 - 2k^3 - 3k + 2}{k^3(k-1)^2},$$

le dénominateur est toujours positif. Le numérateur, n'ayant que deux variations, a au plus deux racines réelles. Or, pour k égal à 1,8, il donne $-3,7$, et pour k égal à 1,9, on obtient $+2,39$. Il y a donc une racine et une seule comprise entre ces deux valeurs, et l'on constate qu'elle est voisine de 1,87.

C'est bien d'ailleurs un minimum, puisque la dérivée passe du négatif au positif.

TABLEAU N° 11,

m, l, p, i, χ, V donnés; k variable.

Valeurs de k.	$f_1 = 2ml\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}$. Valeurs de $\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}$.	$f_2 = 2mlk\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}$. Valeurs de $k\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}$.	$\Theta = \frac{pl}{4m}\left(1-\frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}$. $N = \frac{V\Theta}{75}$. Valeurs de $\left(1-\frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}$.	$\mathfrak{R} = \frac{3}{256\sqrt{2}}\frac{p}{m^3}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)(1+k^2)^{\frac{3}{2}}$. Valeurs de $\left(1+\frac{1}{k^2}\right)(1+k^2)^{\frac{3}{2}}$.	$\mathcal{S} = \frac{3}{64}\frac{1}{m^3 l}\frac{(k^2+1)(k^3+1)}{k^3(k-1)}$. Valeurs de $\frac{(k^2+1)(k^3+1)}{k^3(k-1)}$.
1	1,000	1,000	0,00	5,66	∞
1,1	0,950	1,045	0,10	5,76	42,57
1,2	0,906	1,087	0.18	6,02	23,11
1,3	0,862	1,119	0,27	6,42	16,96
1,4	0,824	1,154	0,35	6,95	14,13
1,5	0,784	1,176	0,43	7,59	12,64
1,6	0,749	1,198	0,50	8,35	11,81
1,7	0,716	1,217	0,57	9,23	11,37
1,8	0,687	1,237	0,64	10,21	11,17
1,9	0,657	1,248	0,72	11,34	11,15
2,0	0,632	1,264	0,79	12,58	11,25
2,1	0,609	1,279	0,86	13,94	11,44
2,2	0,585	1,287	0,93	15,45	11,71
2,3	0,564	1,297	1,00	17,07	12,04
2,4	0,543	1,303	1,07	18,85	12,42
2,5	0,525	1,313	1,14	20,83	12,86

f_0, δ, Ω, λ } constants.

$$\theta_1 = \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{V^2}{114g}.$$

$$D = \frac{240832}{\chi - \frac{V^2}{114g} - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}\sqrt{\frac{p}{i}}.$$

$$\sigma = \chi - \frac{V^2}{114g} - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}.$$

$$\theta_2 = \frac{l}{456mk}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{V^2}{114g}.$$

$$\Theta_1 = \frac{pl}{4m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{p}{g}V^2.$$

$$\Theta_2 = \frac{pl}{4mk}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{p}{g}V^2.$$

IX. — Influence de la variation de k lorsque les éléments, l, m, N, i, χ et V, restent fixés.

Les quantités f_0 [(1)], Θ [(13)], λ [(27)] sont constantes : f_1 et f_2 varient comme $\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}$ et $k\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}$ [(6) et (7)]; p est inversement proportionn el à $\left(1-\frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}$ [(14)], et il en est de même pour Ω [(15)].

Les quantités θ_1 et θ_2 fournies par les formules [(17)] et [(18)] augmentent avec k.

La valeur de Θ_1 s'obtient en remplaçant p dans la relation [(10)] par l'expression [(14)]. On a ainsi

$$\Theta_1 = \frac{300\,m\mathrm{N}}{\mathrm{V}l\left(1-\frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}\left(\frac{\mathrm{V}^2}{g}+\frac{l}{4m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\right),$$

et l'on reconnaît aisément que Θ_1 croît constamment avec k.

On trouve de même [(11) et (14)]

$$\Theta^2 = \frac{300\,m\mathrm{N}}{\mathrm{V}l\left(1-\frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}\left(\frac{\mathrm{V}^2}{g}+\frac{l}{4mk}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\right),$$

expression qui diminue de valeur quand k augmente.

La tension d'incurvation σ s'obtient en remplaçant, dans l'équation [(4)], θ_1 par sa valeur [(17)]; on obtient ainsi

$$\sigma = \chi - \frac{\mathrm{V}^2}{114'g} - \frac{l}{456\,m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}};$$

σ diminue donc quand k va en croissant.

Le diamètre δ des fils est donné par la relation tirée des équations [(21)] et [(14)] :

$$\delta = \sqrt{\frac{43\,500\,m\mathrm{N}}{\mathrm{V}li\left(1-\frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}} = 208,57\sqrt{\frac{m\mathrm{N}}{\mathrm{V}li}}\sqrt{\frac{k}{k-1}\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}}$$

δ varie, par suite, proportionnellement à $\sqrt{\frac{k}{k-1}\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}}$.

Le diamètre D des poulies, déduit de l'équation [(19)], où l'on remplace σ et δ par les valeurs précédentes, est

$$D = 4171330\sqrt{\frac{mN}{Vli}}\,\frac{\sqrt{\frac{k}{k-1}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}}{\chi - \frac{V^2}{114g} - \frac{l}{256m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}};$$

Le coefficient de régularité $\mathfrak{R}$, obtenu par les formules [(23) et (14)], est

$$R = \frac{225N}{256m^2Vl}\,\frac{(1+k^2)(1+k^3)}{k^2(k-1)}.$$

Enfin le coefficient de fonctionnement est donné par la formule [(25)]. Les deux quantités $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{F}$ varient donc proportionnellement à $\frac{(1+k^2)(1+k^3)}{k^2(k-1)}$.

Le tableau n° 12 donne le résumé de cette discussion.

TABLEAU N° 12.

k variable; l, m, N, i, χ, V donnés.

Valeurs de k.	$f_1 = 2ml\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}$. Valeurs de $\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}$.	$f_2 = 2mlk\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}$. Valeurs de $k\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}$.	$\mathfrak{R} = \frac{225\,\mathrm{N}}{256\,m^2\,\mathrm{V}\,l}\,\frac{(1+k^2)(1+k^3)}{k^2(k-1)}$. $\mathcal{F} = \frac{3}{64}\,\frac{1}{m^2 l}\,\frac{(1+k^2)(1+k^3)}{k^2(k-1)}$. Valeurs de $\frac{(1+k^2)(1+k^3)}{k^2(k-1)}$.	$p = \frac{300\,m\mathrm{N}}{\mathrm{V}l}\,\frac{k}{k-1}\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}$. $\Omega = 114\,p$. Valeurs de $\frac{k}{k-1}\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}$.	$\delta = 208{,}57\sqrt{\frac{m\mathrm{N}}{\mathrm{V}li}}\sqrt{\frac{k}{k-1}}\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}$. Valeurs de $\sqrt{\frac{k}{k-1}}\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}$.
1,0...	1,000	1,000	∞	∞	∞
1,1...	0,950	1,045	42,57	10,46	2,23
1,2...	0,906	1,087	23,11	5,43	2,33
1,3...	0,862	1,119	16,96	3,74	1,93
1,4...	0,824	1,154	14,13	2,88	1,70
1,5...	0,784	1,176	12,64	2,35	1,53
1,6...	0,749	1,198	11,81	2,00	1,41
1,7...	0,716	1,217	11,37	1,74	1,32
1,8...	0,687	1,237	11,17	1,55	1,24
1,9...	0,657	1,248	11,15	1,39	1,18
2,0...	0,632	1,264	11,25	1,27	1,13
2,1...	0,609	1,279	11,44	1,16	1,08
2,2...	0,585	1,287	11,71	1,07	1,04
2,3...	0,564	1,297	12,04	1,00	1,00
2,4...	0,543	1,303	12,42	0,93	0,97
2,5...	0,525	1,313	12,86	0,88	0,95

f_0, Θ, λ constants.

$$\theta_1 = \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{\mathrm{V}^2}{114g}.$$

$$\theta_2 = \frac{l}{456mk}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{\mathrm{V}^2}{114g}.$$

$$\Theta_1 = \frac{300\,m\mathrm{N}}{\mathrm{V}l\left(1-\frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}\left[\frac{\mathrm{V}^2}{g} + \frac{l}{4m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\right].$$

$$\Theta_2 = \frac{300\,m\mathrm{N}}{\mathrm{V}l\left(1-\frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}\left[\frac{\mathrm{V}^2}{g} + \frac{l}{4mk}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\right].$$

$$\sigma = \chi - \frac{\mathrm{V}^2}{114g} - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}.$$

$$\mathrm{D} = 4171330\sqrt{\frac{m\mathrm{N}}{\mathrm{V}li}}\,\frac{\sqrt{\frac{k}{k-1}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}}{\chi - \frac{\mathrm{V}^2}{114g} - \frac{l}{256m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}.$$

X. — Influence de la variation de m, lorsque les éléments k, l, p, i, χ et V restent fixes.

Les quantités Ω et δ restent constantes [(15) et (21)]; les flèches f_0, f_1 et f_2 varient proportionnellement à m [(1), (6) et (7)]; Θ est inversement proportionnel à m [(12)], ainsi que N [(14)]; θ_1, θ_2, Θ_1 et Θ_2 varient en sens inverse et sont donnés par les formules [(17)], [(18)], [(10)], [(11)].

σ varie dans le sens de m et est fourni par l'expression

$$\sigma = \chi - \frac{V^2}{114g} - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}},$$

obtenue en remplaçant, dans [(4)], θ_1 par sa valeur donnée par [(17)].

En combinant les équations [(19)], [(21)] et [(17)], on trouve pour D

$$D = \frac{240\,832}{\chi - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} - \frac{V^2}{114g}}\sqrt{\frac{p}{i}},$$

et D varie en sens inverse de m.

Le coefficient de régularité est inversement proportionnel au cube de m [(23)]; le coefficient de fonctionnement est inversement proportionnel au carré [(25)]; enfin λ varie dans le sens de m [(27)].

TABLEAU N° 13.

m variable.

k, l, p, i, V, χ fixes.

Ω, δ } const.	f_0, f_1, f_2 } prop. à m.	Θ, N } inversement prop. à m.	Les valeurs numériques, selon les valeurs de k, des fonctions de k qui entrent dans les coefficients de $\mathfrak{R}$ et de $\mathfrak{F}$, sont données par les deux dernières colonnes du Tableau n° 11.

$$\theta_1 = \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{V^2}{114g}.$$

$$\theta_2 = \frac{l}{456mk}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{V^2}{114g}.$$

$$\Theta_1 = \frac{pl}{4m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{pV^2}{g}.$$

$$\Theta_2 = \frac{pl}{4mk}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{pV^2}{g}.$$

$$\sigma = \chi - \frac{V^2}{114g} - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}.$$

$$D = \frac{240832}{\chi - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} - \frac{V^2}{114g}}\sqrt{\frac{p}{i}}.$$

$$\mathfrak{R} = \frac{3}{256\sqrt{2}}p(1+k^2)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{k^3}\right)\frac{1}{m^3}.$$

$$\mathfrak{F} = \frac{3}{64}l\frac{(k^2+1)(k^3+1)}{k^2(k-1)}\frac{1}{m^2}.$$

$$\lambda = l\left(1+\frac{8}{3}m^2\right).$$

XI. — Influence de la variation de m, lorsque les éléments k, l, p, i, χ et D restent fixes.

Les quantités δ [(21)], σ [(19)], θ_1 [(4)], Ω [(15)] et Θ_1 [(17)] sont constantes; f_0, f_1 et f_2 varient proportionnellement à m [(1), (6) et (7)]; Θ est inversement proportionnel [(12)]; par suite, Θ_2 augmente quand m augmente [(3)]; il en est de même de θ_2 [(18)].

$\mathfrak{R}$ est proportionnel à $\frac{1}{m_3}$ [(23)], $\mathfrak{F}$ à $\frac{1}{m^2}$ [(25)]; λ varie dans le sens de m [(27)].

La vitesse V est donnée par l'équation [(17)], où l'on remplace θ_1 par sa valeur obtenue en fonction des données par les équations [(4) (19) et (21)].

On trouve alors

$$V = 33,44\sqrt{\chi - \frac{240\,832}{D}\sqrt{\frac{p}{i}} - \frac{l}{456\,m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}$$

et l'on voit que V varie dans le sens de m.

Quant au travail transmis N, il est égal à $\frac{V\Theta}{75}$: il est donc le produit de deux facteurs qui varient en sens contraires et, par suite, passe par un maximum.

On trouve d'ailleurs aisément, en remplaçant V par sa valeur précédente et exprimant Θ en fonction des données,

$$N = 0,1115\,pl\left(1 - \frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\,\frac{\sqrt{\chi - \frac{240\,832}{D}\sqrt{\frac{p}{i}} - \frac{l}{456\,m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}}{m}.$$

Le maximum est fourni par

$$m = \frac{l\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}{304\left[\chi - \frac{240\,832}{D}\sqrt{\frac{p}{i}}\right]}$$

et il est égal à

$$19,6\left(1 - \frac{1}{k}\right)p\left(\chi - \frac{240\,832}{D}\sqrt{\frac{p}{i}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

La quantité entre crochets représente θ_1; le maximum du travail transmis est donc

$$19,6\left(1 - \frac{1}{k}\right)p\theta_1^{\frac{3}{2}},$$

et il est donné par une flèche relative dont la valeur est

$$\frac{l\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}{304\,\Theta_1}$$

Quant à la vitesse correspondante, il suffit, pour l'obtenir, de remplacer

m par sa valeur dans la formule

$$V = \sqrt{114 g \left(\theta_1 - \frac{l}{456 m} \sqrt{\frac{1+k^2}{2}} \right)};$$

on trouve alors

$$V = \sqrt{38 g \theta_1}.$$

Les diverses valeurs de la flèche relative et de la vitesse correspondant au maximum de travail, selon les valeurs de la portée, de la tension θ_1 et de k, sont inscrites dans le Tableau n° 14. On n'a pas consigné dans ce tableau les flèches relatives auxquelles conduiraient la formule précédente quand elles étaient plus petites que $\frac{1}{100}$ ou plus grandes que $\frac{1}{10}$, car ce sont là deux limites que l'on ne dépasse pas dans la pratique. Habituellement θ_1 est pris d'autant plus petit que la portée est plus petite ; par suite, $\frac{\theta_1}{l}$ varie entre des limites assez rapprochées. On peut admettre, en moyenne, que ce rapport est de $\frac{1}{20}$ pour les petites distances et de $\frac{1}{10}$ pour les grandes. Dès lors, la flèche relative $\dfrac{l\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}{304\theta_1}$, correspondant au maximum de travail, varie, pour k égal à 2, de $\frac{20\sqrt{5}}{304\sqrt{2}}$ à $\frac{10\sqrt{5}}{304\sqrt{2}}$, c'est-à-dire de $\frac{1}{9,6}$ à $\frac{1}{19,2}$, ou encore, sensiblement, de $\frac{1}{10}$ pour les petites distances à $\frac{1}{20}$ pour les grandes.

Ainsi donc, au point de vue du travail transmis, il y a intérêt à prendre de plus grandes flèches relatives pour les portées faibles que pour les grandes portées. Nous verrons dans la suite que l'on est conduit à la même conclusion lorsqu'on se préoccupe spécialement de faciliter les ré-sections d'épissure.

Il faut d'ailleurs remarquer que l'on se trouve amené ordinairement dans la pratique à diminuer la flèche relative quand la portée augmente, car des flèches trop grandes conduisent, à moins de conditions topographiques toutes spéciales, soit à établir des supports très élevés, soit à pratiquer des tranchées pour laisser passer le câble.

Le maximum de travail transmis, correspondant à des valeurs de k, de θ_1

TABLEAU N° 14.

Valeurs de la flèche relative au repos et de la vitesse correspondant au travail maximum pour k, $2l$ et θ_1 donnés. Valeurs de ce travail maximum.

θ_1.	$2l$																		V.	N.		
	10m.			15m.			20m.			30m.			40m.			60m.						
	$k=1,5$.	$k=2$.	$k=2,5$.	$k=1,5$.	$k=2$.	$k=2,5$.	$k=1,5$.	$k=2$.	$k=2,5$.	$k=1,5$.	$k=2$.	$k=2,5$.	$k=1,5$.	$k=2$.	$k=2,5$.	$k=1,5$.	$k=2$.	$k=2,5$.		$k=1,5$.	$k=2$.	$k=2,5$.
kg																			m			
0,2	0,104	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	8,63	0,58p	0,88p	1,05p
0,4	0,052	0,065	0,078	0,078	0,098	»	0,104	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	12,20	1,65p	2,43p	2,97p
0,6	0,035	0,043	0,052	0,052	0,065	0,078	0,070	0,087	0,104	0,104	»	»	»	»	»	»	»	»	15,00	3,04p	4,55p	5,46p
0,8	0,026	0,033	0,039	0,039	0,049	0,059	0,052	0,065	0,078	0,078	0,098	»	0,104	»	»	»	»	»	17,30	4,67p	7,01p	8,40p
1,0	0,021	0,026	0,031	0,031	0,039	0,047	0,042	0,052	0,062	0,062	0,078	0,094	0,083	0,104	»	»	»	»	19,30	6,53p	9,80p	11,76p
2,0	0,010	0,013	0,016	0,016	0,020	0,024	0,021	0,026	0,031	0,031	0,039	0,047	0,042	0,052	0,062	0,062	0,078	0,094	27,30	18,48p	27,31p	33,26p
3,0	»	»	0,010	0,010	0,013	0,016	0,014	0,017	0,021	0,021	0,026	0,031	0,028	0,035	0,042	0,042	0,052	0,063	33,40	33,95p	50,92p	61,11p
4,0	»	»	»	»	»	0,012	0,010	0,013	0,016	0,016	0,020	0,024	0,021	0,026	0,031	0,031	0,039	0,047	38,60	52,27p	78,40p	94,08p
5,0	»	»	»	»	»	»	»	0,010	0,013	0,013	0,016	0,019	0,017	0,021	0,026	0,026	0,032	0,038	43,20	73,04p	107,33p	131,48p
6,0	»	»	»	»	»	»	»	»	»	0,010	0,013	0,016	0,014	0,017	0,021	0,021	0,026	0,031	47,30	96,04p	141,12p	172,87p

θ_1.	$2l$																		V.	N.		
	80m.			100m.			150m.			200m.			250m.			300m.						
	$k=1,5$.	$k=2$.	$k=2,5$.	$k=1,5$.	$k=2$.	$k=2,5$.	$k=1,5$.	$k=2$.	$k=2,5$.	$k=1,5$.	$k=2$.	$k=2,5$.	$k=1,5$	$k=2$.	$k=2,5$.	$k=1,5$.	$k=2$.	$k=2,5$.		$k=1,5$.	$k=2$.	$k=2,5$.
kg																			m			
0,2	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	8,63	0,58p	0,88p	1,05p
0,4	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	12,20	1,65p	2,43p	2,97p
0,6	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	15,00	3,04p	4,55p	5,46p
0,8	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	17,30	4,67p	7,01p	8,40p
1,0	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	19,30	6,53p	9,80p	11,76p
2,0	0,083	0,104	»	0,104	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	27,30	18,48p	27,31p	33,26p
3,0	0,056	0,072	0,084	0,070	0,087	0,104	0,104	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	33,40	33,95p	50,92p	61,11p
4,0	0,042	0,052	0,063	0,052	0,065	0,078	0,078	0,098	»	0,104	»	»	»	»	»	»	»	»	38,60	52,27p	78,40p	94,08p
5,0	0,034	0,042	0,050	0,042	0,052	0,062	0,062	0,078	0,094	0,083	0,104	»	0,104	»	»	»	»	»	43,20	73,04p	107,33p	131,48p
6,0	0,028	0,035	0,042	0,034	0,043	0,052	0,052	0,065	0,078	0,070	0,087	0,104	0,086	0,108	»	0,104	»	»	47,30	96,04p	141,12p	172,87p

et de $2l$ données, ne pourra, comme nous l'avons dit, être atteint en pratique qu'aux deux conditions suivantes :

1° La vitesse correspondante doit être plus petite que 50^m.

Or, l'expression de la vitesse est

$$V = \sqrt{38 g \theta_1};$$

on doit donc avoir

$$38 g \theta_1 < 2500,$$

ou

$$\theta_1 < 6^{kg},7.$$

2° La flèche relative au repos doit être comprise entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{100}$.

On a dès lors les conditions

$$\frac{1}{100} < \frac{l\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}{304\theta_1} < \frac{1}{10}$$

qui peuvent s'écrire

$$\begin{array}{lr} \text{pour } k = 1,5 & 4\theta_1 < 2l < 50\theta_1, \\ \text{pour } k = 2 & 3,5\theta_1 < 2l < 40\theta_1, \\ \text{pour } k = 2,5 & 3\theta_1 < 2l < 32\theta_1. \end{array}$$

Ainsi donc, lorsque la tension θ_1 sera supérieure à $6^{kg},7$, on ne pourra réaliser le maximum de travail; il en sera de même lorsque la portée sera inférieure à $3\theta_1$ ou supérieure à $50\,\theta_1$. Quand cette portée sera comprise entre $3\theta_1$ et $4\theta_1$ ou entre $32\theta_1$ et $50\theta_1$, le maximum pourra être obtenu par une valeur convenable de k ; enfin, lorsque la portée sera supérieure à $4\theta_1$ et inférieure à $32\,\theta_1$, on pourra prendre k quelconque entre 1,5 et 2,5.

On voit d'ailleurs que, la plus grande valeur de θ_1 étant $6^{kg},7$, ce n'est que pour des portées au plus égales à 330^m qu'on peut trouver des valeurs de θ_1 et de k donnant le maximum de travail.

TABLEAU N° 15.

m variable.

k, l, p, i, χ, D fixes.

$\left.\begin{matrix}\delta\\ \sigma\\ \theta_1\\ \Omega\\ \Theta_1\end{matrix}\right\}$ const. $\left.\begin{matrix}f_0\\ f_1\\ f_2\end{matrix}\right\}$ prop. à m.	$\Theta = \frac{pl}{4}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{m}$. $\Theta_2 = 114p\left[\chi - \frac{240832}{D}\sqrt{\frac{p}{i}} - \frac{l}{456}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{m}\right]$. $\theta_2 = \chi - \frac{240832}{D}\sqrt{\frac{p}{i}} - \frac{l}{456}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{m}$. $\mathfrak{R} = \frac{3}{256\sqrt{2}}p(1+k^2)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{k^3}\right)\frac{1}{m^2}$. $\mathfrak{F} = \frac{3}{64}\frac{1}{l}\frac{(1+k^2)(1+k^3)}{k^2(k-1)}\frac{1}{m^2}$. $\lambda = l\left(1+\frac{8}{3}m^2\right)$. $V = 33,44\sqrt{\chi - \frac{240832}{D}\sqrt{\frac{p}{i}} - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}$. $N = 0,1115pl\left(1-\frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\sqrt{\chi - \frac{240832}{D}\sqrt{\frac{p}{i}} - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}\,\frac{1}{m}$.

XII. — Influence de la variation de la portée $2l$, lorsque les éléments p, χ, k, m, D et i restent fixes.

Les quantités $\Omega[(15)]$ et $\delta[(21)]$ sont constantes; on en conclut que $\sigma[(19)]$, $\theta_1[(4)]$ et $\Theta_1[(17)]$ sont aussi constantes.

Les flèches f_0, f_1, f_2 sont proportionnelles à la portée [(1), (6) et (7)]; il en est de même de $\Theta[(12)]$.

V varie en sens inverse de l et est donné par l'expression

$$V = 33,44\sqrt{\chi - \frac{240832}{D}\sqrt{\frac{p}{i}} - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}.$$

Quant à N, il résulte de la formule [(14)], et l'on a

$$N = 0,1115\,\frac{p}{m}\left(1-\frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\,l\sqrt{\chi - \frac{240832}{D}\sqrt{\frac{p}{i}} - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}.$$

N passe par un maximum donné par

$$l = \frac{304m\left(\chi - \frac{240832}{D}\sqrt{\frac{p}{i}}\right)}{\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}},$$

et la valeur de ce maximum est

$$19,6\left(1-\frac{1}{k}\right)p\left(\chi - \frac{240832}{D}\sqrt{\frac{p}{i}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

identique à celui trouvé dans la question précédente.

Remarquons maintenant que Θ_2 varie en sens inverse de l [(3)], ainsi que Θ_2 [(18)]; λ est proportionnel à l [(27)], $\mathcal{R}$ est constant [(23)] et $\mathcal{F}$ est inversement proportionnel à la portée [(25)].

Ce dernier point explique pourquoi, à égalité de flèche relative, d'adhérence, de limite de tension, pour les mêmes poulies et le même câble, le mouvement est plus doux, moins saccadé, dans les câbles à grande portée que dans les câbles correspondants à une portée petite; le coefficient de fonctionnement qui mesure la régularité cinématique est, en effet, plus faible pour les premiers.

TABLEAU N° 16.

l variable.

k, m, p, i, D, χ fixes.

$$\left.\begin{matrix}\Omega\\ \delta\\ \sigma\\ \theta_1\\ \Theta_1\\ \mathcal{R}\end{matrix}\right\}\text{const.}\qquad \left.\begin{matrix}f_0\\ f_1\\ f_2\\ \Theta\\ \lambda\end{matrix}\right\}\text{prop. à } l.$$

$$V = 33,44\sqrt{\chi - \frac{240832}{D}\sqrt{\frac{p}{i}} - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}.$$

$$N = 0,1115\,\frac{p}{m}\left(1-\frac{1}{k}\right)\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\,l\sqrt{\chi - \frac{240832}{D}\sqrt{\frac{p}{i}} - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}}.$$

$$\theta_2 = \chi - \frac{240832}{D}\sqrt{\frac{p}{i}} - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

$$\Theta_2 = 114p\left[\chi - \frac{240832}{D}\sqrt{\frac{p}{i}} - \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\left(1-\frac{1}{k}\right)\right].$$

$$\mathcal{F} = \frac{3}{64}\,\frac{1}{m^2}\,\frac{(1+k^2)(1+k^3)}{k^2(k-1)}\,\frac{1}{l}.$$

XIII. — Influence des variations de longueur λ du cable lorsque les éléments l, p, N, σ, V et i restent fixes.

Le cas que nous allons traiter est l'un des plus importants dans la pratique; on sait, en effet, que les câbles métalliques sont susceptibles d'éprouver des variations de longueur considérables sous l'influence des changements de température et d'humidité. C'est en même temps l'un des plus fréquents, car les transmissions télédynamiques sont rarement dans des locaux fermés et sont, au contraire, en général, exposées en plein air dans la plus grande partie de leur longueur.

Or, lorsqu'un câble s'allonge ou se raccourcit, c'est-à-dire lorsque λ varie, il est clair que p, i et l restent constants; d'autre part, σ est fixe, car les poulies et le câble sont toujours les mêmes. Quant à la vitesse V, elle ne varie pas, puisqu'elle dépend uniquement du rayon de la poulie motrice et du nombre de tours que celle-ci fait par minute; enfin, le travail transmis doit rester fixe. On se trouve donc placé dans le cas que nous nous proposons d'examiner, c'est-à-dire dans le cas de λ variable, avec l, p, N, σ, V et i constants.

On voit immédiatement que les quantités qui ne varient pas avec λ sont Θ [(13)], Ω [(15)], δ [(21)] et D [(19)].

Quant à m, qui est variable, il est fourni par la formule [(27)]

$$m = \frac{\sqrt{3(\lambda - l)}}{2\sqrt{2l}};$$

m varie donc dans le sens de λ, ce qui était d'ailleurs évident *a priori* (¹).

(¹) On déduit de la valeur de m

$$\frac{d\lambda}{l} = \frac{16}{3} m\,dm;$$

pour une même variation relative de longueur du câble, on obtient donc une variation de flèche relative d'autant plus grande que cette flèche est plus petite.

Ainsi les variations atmosphériques produiront sur les flèches un effet d'autant plus considérable que le câble est plus tendu.

Cette remarque est fondamentale pour la détermination du minimum de flèche relative au repos à adopter selon la portée (*voir* § IV de la troisième Partie).



Il en est de même pour f_0, qui est donné par la relation [(1)],

$$f_0 = \sqrt{\frac{3l(\lambda - l)}{2}}.$$

Cherchons maintenant la valeur de k en fonction de λ et des quantités fixes.

Pour cela, égalons les deux valeurs de Θ fournies par les équations [(12)] et [(13)] :

$$\frac{75\,\mathrm{N}}{\mathrm{V}} = \frac{pl}{4m}(k-1)\sqrt{\frac{1+\frac{1}{k^2}}{2}} \quad (^1).$$

Mais la quantité $\sqrt{\frac{1+\frac{1}{k^2}}{2}}$ varie entre des limites très rapprochées, car, dans la pratique, k reste d'ordinaire compris entre 1,5 et 2,5. Cette quantité prend, en effet, les valeurs suivantes, selon les valeurs de k :

	k.				
	1,50.	1,75.	2,00.	2,25.	2,50.
$\sqrt{\frac{1+\frac{1}{k^2}}{2}}$	0,85	0,81	0,79	0,77	0,76

On peut, dès lors, poser

$$\frac{75\,\mathrm{N}}{\mathrm{V}} = \frac{pl}{4m}\mathrm{A}(k-1),$$

A étant une constante dont les valeurs sont celles indiquées ci-dessus.

---

(1) On pourrait tirer de cette équation la valeur de k. On a, en effet,

$$\frac{300\sqrt{2}\,\mathrm{N}}{\mathrm{V}pl}m = \frac{k-1}{k}\sqrt{1+k^2},$$

et, si l'on pose

$$\frac{300\sqrt{2}\,\mathrm{N}}{\mathrm{V}pl}m = \mathrm{L},$$

on déduit de l'équation précédente

$$k^4 - 2k^3 + (2 - \mathrm{L}^2)k^2 - 2k + 1 = 0,$$

On déduit de là

$$k = 1 + \frac{300 m N}{A V p l},$$

et, en remplaçant m par sa valeur précédemment trouvée,

$$k = 1 + \frac{520 N \sqrt{\lambda - l}}{A V p (2l)^{\frac{3}{2}}};$$

k croît donc avec λ. Mais nous avons vu que k doit être plus petit qu'une certaine quantité pour que l'adhérence soit assurée. Lorsque l'allongement atteindra une valeur suffisante, le glissement se produira donc.

Il est clair que cet inconvénient sera d'autant plus à craindre que N sera plus grand et que p et l seront plus petits, car la quantité $\sqrt{\frac{\lambda - l}{l}}$ reste sensiblement constante, pour une même variation de température ou d'humidité, quelle que soit la portée $2l$, et son coefficient contient en fac-

---

ou, en posant

$$k + \frac{1}{k} = z,$$

$$z^2 - 2z - L^2 = 0.$$

On tire de là

$$z = 1 \pm \sqrt{1 + L^2},$$

et z devant être positif, puisque k est essentiellement positif, ainsi que L^2, le signe + est seul à prendre. On trouve alors

$$k = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2},$$

valeur dans laquelle il faut prendre le signe +, afin que k soit supérieur à l'unité.

On a enfin, en remplaçant z, L et m par leurs valeurs,

$$k = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{67500 N^2 (\lambda - l)}{V^2 p^2 l^3}} + \sqrt{\frac{67500 N^2 (\lambda - l)}{V^2 p^2 l^3} - 2 + 2\sqrt{1 + \frac{67500 N^2 (\lambda - l)}{V^2 p^2 l^3}}}\right].$$

La complication de cette formule explique pourquoi nous avons pris la méthode approchée indiquée dans le texte et qui donne, d'ailleurs, une approximation très suffisante.

teur $\frac{N}{pl}$. A ce point de vue, il y a donc intérêt, pour que l'adhérence soit assurée, malgré les variations de longueur du câble, à augmenter le poids de ce câble, surtout quand la portée est petite.

La flèche f_1 est fournie par la relation [(6)], où l'on remplace m et k par leurs valeurs; on a alors

$$f_1 = \sqrt{\frac{3l(\lambda - l)}{1 + \left[1 + \frac{184\,N\sqrt{\lambda - l}}{AVpl^{\frac{3}{2}}}\right]^2}},$$

et l'on constate facilement que f_1 croît constamment avec λ (1).

Il en est de même de f_2, qui est égal à kf_1. En effet, k et f_1 croissent tous deux avec λ. On voit d'ailleurs que f_2 croîtra plus vite que f_1 et que, par suite, la différence des flèches $f_2 - f_1$ ira en augmentant quand λ augmente.

Ceci posé, cherchons l'expression de θ_1; on a par la formule [(17)]

$$\theta_1 = \frac{V^2}{114g} + \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}};$$

d'autre part, en égalant les valeurs de Θ fournies par les équations [(12)] et [(13)], on trouve

$$\frac{l}{4m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} = \frac{75\,Nk}{pV(k-1)};$$

on en déduit pour θ_1

$$\theta_1 = \frac{V^2}{114g} + \frac{75\,Nk}{114pV(k-1)},$$

(1) L'expression de la flèche f_1 peut se mettre sous la forme

$$f_1 = \sqrt{\frac{3l}{\frac{1}{\lambda - l} + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda - l}} + \frac{184\,N}{AVpl^{\frac{3}{2}}}\right)^2}},$$

et l'on voit bien alors que, lorsque λ augmente, la flèche f_1 va en croissant.

ou encore, en remplaçant k par sa valeur,

$$\theta_1 = \frac{V^2}{114g} + \frac{25N}{38pV} + \frac{5\sqrt{2}Al^{\frac{3}{2}}}{38 \times 52\sqrt{\lambda - l}}.$$

θ_1 va donc constamment en croissant quand λ diminue, c'est-à-dire quand le câble se raccourcit; par suite la somme $\theta_1 + \sigma$ va constamment en croissant, puisque σ est constant; elle peut ainsi dépasser la limite que permet la résistance du câble.

Remarquons d'ailleurs que plus $\lambda - l$ est petit, c'est-à-dire plus le câble est tendu, et plus aussi θ_1 est grand, c'est-à-dire voisin de la limite maxima qu'il peut atteindre. Il est donc nécessaire de ne pas trop tendre les câbles si l'on ne veut pas que les raccourcissements de longueur dus aux variations atmosphériques ou les erreurs commises en refaisant les épissures puissent donner lieu à des efforts dangereux ([1]).

L'expression que nous venons de trouver pour θ_1 nous montre que Θ_1,

---

([1]) Il est utile de remarquer ici que l'accroissement de tension dû à un raccourcissement du câble est d'autant plus considérable que le câble est plus tendu.

On a, en effet,

[(17)] $$\theta_1 = \frac{l}{456m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{V^2}{114g},$$

[(12)] $$\Theta = \frac{pl}{4m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\,\frac{k-1}{k}.$$

Θ étant constant, on déduit de cette dernière équation

$$\frac{dm}{m} = \frac{dk}{k}\,\frac{1+k^3}{(k-1)(1+k^2)};$$

on obtient de même, par la première, et en remplaçant $\frac{dm}{m}$ par sa valeur

$$d\theta_1 = -\frac{dk}{m}\,\frac{l}{456}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\,\frac{1}{k(k-1)},$$

ou enfin, en tirant m de l'équation [(17)],

$$\frac{d\theta_1}{\theta_1 - \frac{V^2}{114g^2}} = -\frac{dk}{k}\,\frac{1}{k-1},$$

dont la valeur est

$$\Theta_1 = \frac{pV^2}{g} + \frac{75N}{V} + \frac{15\sqrt{2}}{52}\frac{Apl^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda - l}},$$

décroît quand λ augmente.

Il en est de même pour Θ_2, puisque Θ est constant et que l'on a

$$\Theta_2 = \Theta_1 - \Theta.$$

Les deux tensions totales Θ_1 et Θ_2 diminuent donc ou augmentent toutes deux de la même quantité quand λ augmente ou diminue. On a d'ailleurs

$$\Theta_2 = \frac{pV^2}{g} + \frac{15\sqrt{2}}{52}\frac{Apl^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda - l}}.$$

Quant à Θ_2, qui est égal, d'après [(18)], à $\frac{\Theta^2}{\Omega}$, il est donné par l'expression

$$\theta_2 = \frac{V^2}{114g} + \frac{5\sqrt{2}}{38 \times 52}\frac{Al^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda - l}};$$

il diminue aussi quand λ augmente, et précisément de la même quantité que θ_1.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à étudier l'influence des variations de longueur du câble sur les coefficients de régularité et de fonctionnement.

---

relation qui peut s'écrire

$$\frac{d\theta_1}{\theta_1 - \frac{V^2}{114g}} = -\frac{dm}{m}\frac{1+k^2}{1+k^3},$$

ou encore, d'après l'équa on $\frac{d\lambda}{l} = \frac{16}{3} m\,dm$,

$$\frac{d\theta_1}{\theta_1 - \frac{V^2}{114g}} = -\frac{d\lambda}{l}\frac{3}{16}\frac{1}{m^2}\frac{1+k^2}{1+k^3}.$$

Cette formule montre que, toutes choses égales d'ailleurs, l'accroissement de tension résultant d'un même raccourcissement du câble est d'autant plus grand que la flèche relative est plus petite.

Pour cela, remplaçons dans la formule [(24)] Θ par sa valeur $\frac{75N}{V}$, nous aurons

$$\mathcal{R} = 632812,5 \frac{N^3}{p^2 V^3 l^3} \frac{k^3+1}{(k-1)^3}.$$

Or l'on sait que, quand λ augmente, k augmente; mais la quantité $\frac{k^3+1}{(k-1)^3}$, qui peut s'écrire $\frac{1+\frac{1}{k^3}}{\left(1-\frac{1}{k}\right)^3}$, diminue quand k augmente ; la régularité du mouvement diminue donc quand le câble s'allonge et augmente quand il se raccourcit. De plus, il est facile de voir que la variation de $\mathcal{R}$ correspondant à une même variation de k, c'est-à-dire à une même variation de λ, est d'autant plus grande que $k-1$ est plus petit, ou, si l'on veut, est d'autant plus grande que m est plus faible, puisque m est sensiblement proportionnel à $k-1$.

C'est là un nouvel inconvénient des flèches relatives trop faibles, et une nouvelle raison qui vient s'ajouter à celles que nous avons déjà données pour repousser l'emploi des câbles très tendus. Les moindres variations de longueur agissent alors sur la régularité; un petit allongement peut la rendre insuffisante; un léger raccourcissement peut la rendre trop forte, c'est-à-dire donner lieu à un mouvement dur et saccadé.

Les considérations que nous venons d'exposer s'appliquent au coefficient de fonctionnement donné par la formule [(26)], où l'on remplace Θ par sa valeur

$$\mathcal{F} = 8437,5 \frac{N^2}{p^2 V^2 l^3} \frac{k^3+1}{(k-1)^3}.$$

Enfin les allongements du câble correspondant à deux valeurs différentes de m, quantités qu'il peut être utile de connaître au point de vue des raccourcissements à opérer par suite des allongements produits par l'usage, sont donnés par l'expression suivante, déduite de l'équation [(27)],

$$\frac{32}{3}(m'^2 - m^2)\,l.$$

Nous avons réuni dans le Tableau suivant les valeurs numériques des quantités $\frac{(k-1)^3}{1+k^3}$ et $\frac{1+k^3}{(k-1)^3}$ qu'il est nécessaire d'avoir pour les applications.

TABLEAU N° 17.

Valeurs de k.	Valeurs de $\frac{(k-1)^3}{1+k^3}$.	Valeurs de $\frac{1+k^3}{(k-1)^3}$.
1,0	0	∞
1,1	0,0004	2331,00
1,2	0,0029	341,00
1,3	0,0085	118,40
1,4	0,0171	58,50
1,5	0,0286	34,98
1,6	0,0423	23,65
1,7	0,0579	17,23
1,8	0,0749	13,32
1,9	0,0927	10,78
2,0	0,1111	9,00
2,1	0,1297	7,72
2,2	0,1483	6,75
2,3	0,1669	6,00
2,4	5,1851	5,41
2,5	0,2030	4,93

En résumé, nous sommes arrivé dans ce paragraphe aux résultats suivants :

1° Les allongements du câble produits soit par l'usage, soit par une élévation de température, soit surtout par une diminution d'humidité, ont pour effet de diminuer l'adhérence sur les poulies. Pour que le glissement ne se produise pas par suite de ces allongements, il faut que le câble soit suffisamment lourd. A ce point de vue, il doit être d'autant plus pesant que la portée est plus petite.

2° Les raccourcissements du câble produits par un abaissement de température et surtout par une augmentation d'humidité ont pour effet d'augmenter de la même quantité la tension des deux brins et d'accroître la régularité du mouvement.

3° Il résulte de là que l'on ne doit pas employer des câbles trop tendus, afin d'éviter qu'un léger raccourcissement produise des efforts dangereux au point de vue de la résistance et que le mouvement soit trop saccadé.

4° En rapprochant cette conclusion de ce fait, qu'avec des câbles trop lâches le glissement serait à craindre, on voit que la flèche relative doit être comprise entre certaines limites.

La limite inférieure étant fonction des raccourcissements dus aux variations atmosphériques, il est clair que l'expérience seule pourra la déterminer. Nous reviendrons sur ce point dans la troisième Partie.

TABLEAU N° 18.

λ variable. l, p, i, V, σ, N fixes.

Θ, Ω, δ, D } constants.

$$m = \frac{\sqrt{3(\lambda - l)}}{2\sqrt{2l}}.$$

$$f_0 = \sqrt{\frac{3l(\lambda - l)}{2}}.$$

$$k = 1 + 229,6\frac{N\sqrt{\lambda - l}}{Vpl^{\frac{3}{2}}}.$$

$$f_1 = \sqrt{\frac{3l(\lambda - l)}{1 + \left(1 + 229,6\frac{N\sqrt{\lambda - l}}{Vpl^{\frac{3}{2}}}\right)^2}}.$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{3l(\lambda - l)}{1 + \frac{1}{\left(1 + 229,6\frac{N\sqrt{\lambda - l}}{Vpl^{\frac{3}{2}}}\right)^2}}}.$$

$$\theta_1 = \frac{V^2}{114g} + \frac{25N}{38pV} + \frac{l\sqrt{2l}}{285\sqrt{3(\lambda - l)}}.$$

$$\Theta_1 = \frac{pV^2}{g} + \frac{75N}{V}\frac{38pl\sqrt{2l}}{95\sqrt{3(\lambda - l)}}.$$

$$\theta_2 = \frac{V^2}{114g} + \frac{l\sqrt{2l}}{285\sqrt{3(\lambda - l)}}.$$

$$\Theta_2 = \frac{pV^2}{g} + \frac{38pl\sqrt{2l}}{95\sqrt{3(\lambda - l)}}.$$

$$\chi = \frac{V^2}{114g} + \frac{25N}{38pV} + \frac{l\sqrt{2l}}{285\sqrt{3(\lambda - l)}} + \sigma.$$

$$\mathfrak{R} = 632812,5\frac{N^3}{p^2V^3l^3}\frac{k^3 + 1}{(k - 1)^3}.$$

$$\mathfrak{F} = 8437,5\frac{N^2}{p^2V^2l^3}\frac{k^3 + 1}{(k - 1)^3}.$$

XIV. — Condition d'équivalence de deux transmissions ayant même portée.

Nous appellerons *transmissions équivalentes* deux transmissions pour lesquelles le coefficient de fonctionnement est le même. On conçoit, en effet, que la bonne marche d'une transmission est mesurée par le rapport de l'excès de tension due à une variation du travail résistant à la tension utile totale. Il est donc logique de prendre le coefficient de fonctionnement comme représentant la valeur relative de la transmission.

Ceci admis, la condition d'équivalence de deux câbles de même portée est évidemment, d'après la formule [(25)],

$$m^2 \frac{k^2(k-1)}{(1+k^2)(1+k^3)} = \text{const.},$$

ou encore

$$mk\sqrt{\frac{k-1}{(1+k^2)(1+k^3)}} = \text{const.}$$

Nous donnons ici la suite des valeurs numériques que prennent les coefficients de m^2 ou de m, selon les valeurs de k.

TABLEAU N° 19.

Valeurs de k.	Valeurs de $k\sqrt{\frac{k-1}{(1+k^2)(1+k^3)}}$.	Valeurs de $\frac{k^2(k-1)}{(1+k^2)(1+k^3)}$.
1,0	0	0
1,1	0,150	0,023
1,2	0,208	0,043
1,3	0,244	0,059
1,4	0,266	0,071
1,5	0,281	0,079
1,6	0,291	0,085
1,7	0,297	0,088
1,8	0,299	0,089
1,9	0,300	0,090
2,0	0,298	0,089
2,1	0,296	0,087
2,2	0,292	0,085
2,3	0,288	0,083
2,4	0,284	0,080
2,5	0,279	0,078

On voit par ce qui précède que la condition d'équivalence de deux câbles dépend uniquement, pour une même portée, de la flèche relative au repos m et du rapport des flèches k; le poids du câble, le nombre de fils qui le forment, sa vitesse, le travail qu'il transmet, le diamètre des poulies, n'interviennent pas.

C'est là un fait remarquable et qui montre bien l'importance pratique que l'on doit attribuer, d'une part à la fixation du nombre k que nous avons étudié au § IV, d'autre part au choix de la flèche relative, choix sur lequel nous insisterons au § I de la troisième Partie.

XV. — Condition d'équivalence de deux transmissions ayant des portées différentes.

Trois cas peuvent se présenter dans les applications : m et k ont des valeurs différentes d'un câble à l'autre, ou bien m conserve la même valeur et l'on veut déterminer k, ou enfin c'est k qui est fixe et c'est m qu'il faut obtenir. Nous examinerons successivement ces trois hypothèses.

1° *m et k sont différents d'un câble à l'autre.*

La condition d'équivalence est alors

$$m^2 l \frac{k^2(k-1)}{(1+k^2)(1+k^3)} = \text{const.},$$

et le Tableau n° **9** permet, dans chaque cas, de déterminer la valeur de m, en fonction de l.

Nous donnerons un exemple pour éclaircir la méthode :

Soit un câble correspondant à une portée de 120^{m}, ayant une flèche relative au repos de $\frac{1}{40}$ et établi pour une valeur de k égale à 2. On veut établir un câble équivalent pour une portée de 30^{m} et pour une valeur de k égale à 1,8.

Si nous nous reportons au Tableau n° **9**, nous voyons que la quantité $\frac{k^2(k-1)}{(1+k^2)(1+k^3)}$ a même valeur pour k égal à 2 ou à 1,8. On devra donc

avoir pour l'équivalence

$$\frac{1}{40^2} \times 120 = m'^2 \times 30,$$

d'où l'on tire

$$m' = \frac{1}{20}.$$

Il suffira donc de donner au second câble une flèche au repos égale au vingtième de la portée, pour qu'il soit équivalent au premier lorsque le rapport des tensions sera 1,8.

Une remarque doit être faite ici; lorsqu'on se donne *a priori*, ainsi que nous venons de le faire, la valeur de k pour le second câble, on obtient pour la valeur de m correspondante

$$m'^2 = m^2 \frac{l}{l'} \frac{k^2(k-1)}{k'^2(k'-1)} \frac{(1+k'^2)(1+k'^3)}{(1+k^2)(1+k^3)}.$$

Or la valeur de m' ne doit pas descendre au-dessous d'une certaine limite [1] qui, pour les câbles exposés aux variations atmosphériques, est, ainsi que nous le verrons dans la troisième Partie, de $\frac{1}{40}$. On devra donc avoir

$$m^2 \frac{l}{l'} \frac{k^2(k-1)}{k'^2(k'-1)} \frac{(1+k'^2)(1+k'^3)}{(1+k^2)(1+k^3)} \geq \frac{1}{1600},$$

ou encore, en désignant par A et A' les valeurs de l'expression $\frac{k^2(k-1)}{(1+k^2)(1+k^3)}$, pour k et k',

$$l' \leq 1600 m^2 l \frac{A}{A'}.$$

Or, d'après le Tableau n° **14**, la valeur maximum de A' est 0,09; si donc

$$l' \leq 1600 m^2 l \frac{A}{0,09},$$

on sera sûr, quelle que soit la valeur de k' choisie, de trouver une valeur

[1] Il est clair que m' n'a pas théoriquement de limite supérieure, car, lorsque la flèche relative augmente, le seul danger à craindre, c'est le glissement; or, ici l'adhérence est assurée par la valeur k' choisie *a priori*. En pratique cependant m' ne dépasse jamais $\frac{1}{10}$.

de m' convenable, et il y aura, par suite, une infinité de systèmes de valeurs pour k' et m' donnant un deuxième câble équivalent au premier.

Si, au contraire,

$$l' > 1600 m^2 l \frac{A}{0,09},$$

il faudra, pour obtenir une flèche relative convenable, que A' soit assez petit pour rendre $1600 m^2 l \frac{A}{A'}$ plus grand que l'; la valeur de k' ne pourra plus alors être pris earbitrairement et, si l'on désigne par k'_1 et k'_2 les deux valeurs de k' correspondant, dans le Tableau n° **14**, à la valeur de A' donnée par l'équation

$$l = 1600 m^2 l \frac{A}{A'},$$

il faudra que k' soit plus petit que la plus petite, ou plus grand que la plus grande.

Il est d'ailleurs évident que, si la valeur de A', tirée de l'équation précédente, est plus petite que 0,078, c'est-à-dire que la valeur de A pour k égal à 2,5, on n'aura qu'une seule valeur k'_1 correspondante; la valeur choisie pour k' devra alors être inférieure à cette limite k'_1.

En résumé donc, il est toujours possible de trouver, d'une infinité de manières, un second câble équivalent à un câble donné, et cela quelle que soit la portée. Si cette portée est plus petite qu'une certaine limite (1), on peut se donner le rapport des tensions *a priori* et d'une manière quelconque entre 1 et 2,5, sans avoir à craindre des efforts dangereux pour le mécanisme. Si cette portée est plus grande que la limite dont il s'agit, la valeur du rapport des tensions n'est plus absolument arbitraire et doit être comprise entre certaines limites.

---

(1) La limite numérique que nous avons donnée à la portée l' du second câble quand on se donne k *a priori*, pour que cette valeur de k puisse être choisie d'une façon absolument arbitraire, suppose que ce second câble est exposé en plein air, puisque nous avons admis que m' ne pouvait être inférieur à $\frac{1}{40}$. Dans le cas où il s'agirait d'une transmission à l'abri de trop fortes variations de température ou d'humidité, m' pourrait descendre au dessous de $\frac{1}{40}$; la limite de l' dont nous venons de parler serait abaissée, mais le raisonnement à faire pour la déterminer serait évidemment le même.

Dans ce dernier cas, il est naturel d'ailleurs (puisque l'on est exposé, en fixant tout d'abord la valeur de k, à être conduit à une flèche relative trop petite) de se donner *a priori* m' et de chercher la valeur de k correspondante. On en déduira pour A' la valeur $\frac{m^2}{m'^2}\frac{l}{l'}A$, et par le Tableau n° **9** on aura les deux valeurs de k' répondant à la question, si A' est compris entre 0,09 et 0,078, ou la valeur unique de k' si A' est inférieur à 0,078.

En choisissant pour m' la valeur minimum qu'il peut avoir, on sera sûr de ne pas avoir de tâtonnements à faire.

2° *La flèche relative est la même pour les deux câbles.*

La condition d'équivalence est alors

$$l\frac{k^2(k-1)}{(1+k^2)(1+k^3)} = l'\frac{k'^2(k'-1)}{(1+k'^2)(1+k'^3)}.$$

La valeur de k étant comme pour le premier câble, on en déduira celle de $\frac{k^2(k-1)}{(1+k^2)(1+k^3)}$ par le Tableau n° **19**; on calculera alors la valeur de $\frac{l}{l'}\frac{k^2(k-1)}{(1+k^2)(1+k^3)}$ et, en cherchant cette valeur dans le Tableau, on obtiendra les deux valeurs de k', ou la valeur unique, fournissant un second câble équivalent au premier.

Nous aurions à faire ici une discussion analogue à celle qui vient d'être exposée précédemment, et nous devrions poser

$$l' \geq \frac{l}{0,09}\frac{k^2(k-1)}{(1+k^2)(1+k^3)};$$

on voit donc qu'il y a une limite inférieure pour la nouvelle portée l'; au-dessous de cette limite, il ne sera plus possible d'obtenir un câble équivalent au premier et ayant même flèche relative.

En résumé donc, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Pour que l'on puisse obtenir une transmission équivalente à une transmission donnée, la flèche relative restant la même, il faut que la nouvelle portée ne soit pas trop petite, et, dans ce cas, il suffit de prendre pour le

nouveau rapport des flèches k une valeur telle que la quantité $\frac{k^2(k-1)}{(1+k^2)(1+k^3)}$ *ait, pour les deux câbles, deux valeurs inversement proportionnelles à leurs portées.*

3° *Le rapport k des flèches est le même pour les deux câbles* (¹).

La condition d'équivalence se réduit à

$$m^2 l = m'^2 l'.$$

S'il s'agit d'un câble exposé à l'air, m' devant être au plus égal à $\frac{1}{40}$, on devra avoir

$$l' \leq 1600 m^2 l.$$

Il y a donc une limite supérieure de portée au delà de laquelle il n'est plus possible d'obtenir, pour une même valeur de k, un second câble équivalent au premier.

Au-dessous de cette limite, on détermine la flèche relative à adopter par la règle qui suit :

Pour que l'on puisse obtenir une transmission équivalente à une transmission donnée, le rapport des flèches restant le même, il faut que la nouvelle portée ne soit pas trop grande, et, dans ce cas, il suffit de prendre pour la flèche relative une valeur telle que les deux flèches relatives soient en raison inverse des racines carrées des portées.

Cette règle peut se mettre sous une autre forme que l'on obtient en remplaçant m et m' par leurs valeurs $\frac{f_0}{2l}$ et $\frac{f'_0}{2l'}$ dans l'équation d'équivalence. On voit alors que les flèches au repos des deux câbles doivent être proportionnelles aux racines carrées des portées (²).

(¹) Le rapport des tensions est par suite le même si les vitesses des deux câbles sont égales, ainsi que les tensions θ_1, car on a

$$k_\theta = \frac{k}{1+(k-1)\frac{V^2\Delta}{1000g}\frac{1}{\theta_1}}.$$

(²) On peut dire aussi que, pour k restant le même, les câbles équivalents doivent avoir le même excès de longueur $4(\lambda - l)$; on a, en effet,

$$4(\lambda - l) = \frac{32}{3} m^2 l.$$

Ainsi, par exemple, si l'on considère un câble ayant une portée de 120^m et une flèche relative de $\frac{1}{40}$, ce qui correspond à une flèche au repos de 3^m, on trouve que pour obtenir un câble équivalent, dans le cas d'une portée de 30^m, et pour un même rapport de tensions, il faut donner à ce câble une flèche relative de $\frac{1}{20}$, soit une flèche au repos de $1^m,5$.

Les deux théorèmes que nous venons d'énoncer sont fondamentaux dans l'étude des transmissions télédynamiques, en ce sens qu'ils permettent, pour une distance *quelconque*, d'établir un câble équivalent à un câble existant dont le bon fonctionnement a pu être apprécié. En effet, nous avons vu que, pour que le problème soit possible, m ayant conservé la même valeur, il fallait avoir

$$l' \leq \frac{l}{0,09} \frac{k^2(k-1)}{(1+k^2)(1+k^3)};$$

le second membre est toujours plus petit que l, car le maximum de $\frac{k^2(k-1)}{(1+k^2)(1+k^3)}$ est 0,09; donc, quand la nouvelle portée sera plus grande que la première, on pourra supposer la même flèche relative aux deux câbles.

Mais nous avons vu aussi que, si l'on donnait à k la même valeur pour les deux câbles, la condition pour qu'on pût avoir un câble équivalent était

$$l' \leq 1600 m^2 l;$$

la valeur minimum du second membre est l, car m est toujours plus grand que $\frac{1}{40}$; donc, quand la nouvelle portée est plus petite que l'ancienne, on peut supposer le même rapport de tensions pour les deux câbles.

Nous voyons ainsi que dans tous les cas on peut obtenir un câble équivalent à un cable donné pour une portée différente, soit en laissant m constant quand la portée augmente, soit en laissant k constant quand la portée diminue.

Nous aurons occasion de revenir sur ce point, qui constitue la base des règles pratiques exposées dans la troisième Partie.

XVI. — PROCÉDÉ GRAPHIQUE PERMETTANT D'OBTENIR SIMULTANÉMENT TOUS LES ÉLÉMENTS NÉCESSAIRES POUR L'ÉTABLISSEMENT D'UNE TRANSMISSION TÉLÉDYNAMIQUE.

Le tracé que nous allons indiquer est un tracé approché, mais qui, lorsque la vitesse que l'on veut donner au câble n'est pas trop considérable, est suffisamment exact, et qui, par sa simplicité extrême, peut rendre des services dans la pratique.

Pour l'obtenir, posons la relation existant entre les flèches

$$f_1^2 + f_2^2 = 2f_0^2;$$

d'un autre côté, si V n'est pas très grand, on a

$$\Theta_1 = \frac{pl^2}{2f_1},$$

$$\Theta_2 = \frac{pl^2}{2f_2},$$

et, pour le câble au repos,

$$\Theta_0 = \frac{pl^2}{2f_0};$$

en portant les valeurs de f_0, f_1 et f_2 tirées de ces expressions dans l'équation précédente, on trouve

$$\frac{1}{\Theta_1^2} + \frac{1}{\Theta_2^2} = \frac{2}{\Theta_0^2}.$$

Ces deux relations permettent de construire la courbe des flèches et celle des tensions.

1° *Courbe des flèches.*

Prenons deux axes rectangulaires OX et OY (*fig.* 5), portons les valeurs de f_1 comme abscisses et celles de f_2 comme ordonnées, la courbe des flèches sera une circonférence dont le rayon OB s'obtiendra en prenant sur OX une longueur OA égale à f_0 et élevant en A une ordonnée AB égale aussi à f_0.



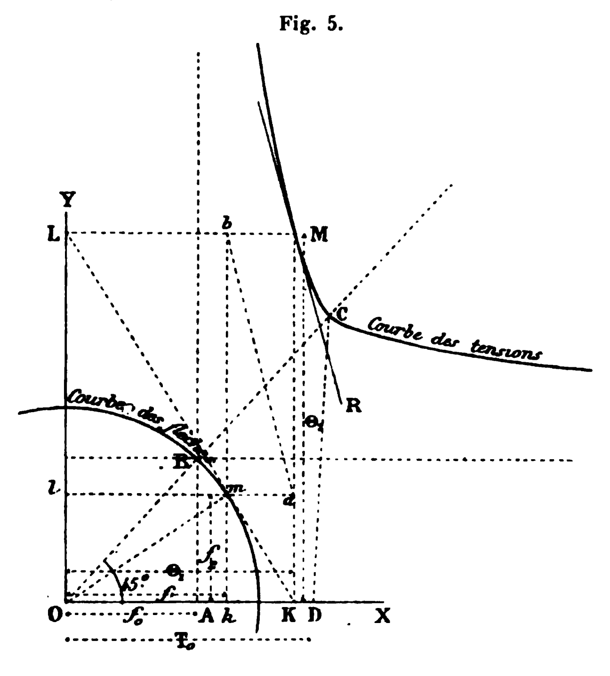
2° *Courbe des tensions.* — La courbe des tensions est évidemment une courbe unicursale du quatrième degré, car elle a trois points doubles, l'un à l'origine, les deux autres à l'infini sur OX et OY; elle passe par le point C donné par

$$x = \Theta_0, \quad y = \Theta_0,$$

et peut être construite géométriquement de la manière suivante :

Prenons un point quelconque m de la circonférence des flèches et menons la tangente en ce point, qui rencontre les axes en K et L (*fig.* 5); par

Fig. 5.



ces deux points menons la perpendiculaire aux axes correspondants, nous aurons un point M de la courbe cherchée [1].

---

[1] En effet, l'équation de la courbe des tensions étant

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{2}{\Theta_0^2},$$

la tangente en m est

$$Xx + Yy - 2f_0^2 = 0,$$

d'où

$$OK = x_1 = \frac{2f_0^2}{x},$$

$$OL = y_1 = \frac{2f_0^2}{y};$$

La tangente en M est d'ailleurs facile à obtenir, car son coefficient angulaire est $\frac{d\Theta_2}{d\Theta_1}$; or, si l'on différentie l'équation de la courbe

$$\frac{1}{\Theta_1^2}+\frac{1}{\Theta_2^2}=\frac{2}{\Theta_0^2},$$

on obtient

$$\frac{d\Theta_2}{d\Theta_1}=-\frac{\Theta_2^3}{\Theta_1^3},$$

mais si l'on construit la droite ab diagonale du rectangle construit avec les coordonnées de M et m, le coefficient angulaire de cette droite est

$$-\frac{mb}{ma};$$

or, l'on a

$$mb\times f_2=f_1^2,$$
$$ma\times f_1=f_2^2,$$

le coefficient angulaire de cette droite est donc

$$-\frac{f_1^3}{f_2^3};$$

c'est-à-dire qu'elle est parallèle à la tangente MR au point M, puisque les tensions sont inversement proportionnelles aux flèches.

Les considérations qui viennent d'être exposées permettent de réunir en une seule épure, facile à exécuter même en croquis, les diverses constructions nécessaires pour obtenir tous les éléments qui peuvent être utiles dans un projet de câble. Voici comment on opérera :

---

en portant les valeurs de x et y dans l'équation

$$x^2+y^2=2f_0^2,$$

on obtient

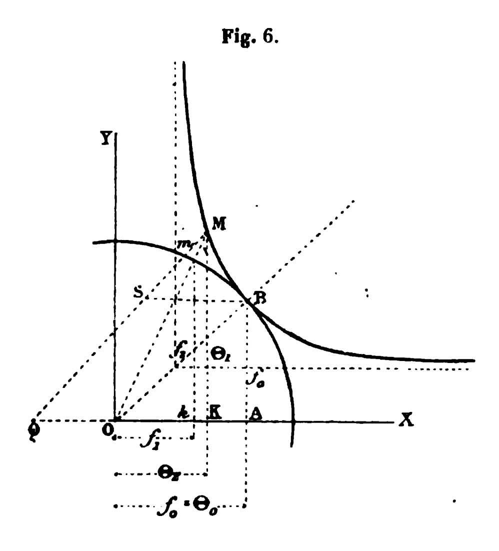
$$2x_1^2y_1^2=4f_0^2(x_1^2+y_1^2).$$

Il suffit donc de prendre comme représentant T_0 une longueur OD double de OA pour que la courbe indiquée donne la courbe des tensions. Il est d'ailleurs clair que, ayant porté les f_1 comme abscisses et les f_2 comme ordonnées dans la courbe des flèches, on portera aussi les Θ_1 comme abscisses et les Θ_2 comme ordonnées dans la courbe des tensions, afin que les deux points M et m se correspondent, c'est-à-dire qu'à la plus grande flèche corresponde la plus petite tension.

Prenons, pour représenter Θ_0, la même longueur que celle admise pour représenter f_0; la courbe des tensions (*fig.* 6) sera alors tangente à la courbe des flèches au point B, et ses asymptotes correspondront à $\frac{OA}{2}$ et $\frac{AB}{2}$.

Menons par le point B la parallèle à OX, par le point M la parallèle à

Fig. 6.



OB; la longueur BS ainsi déterminée est égale à QK — OK, c'est-à-dire à $\Theta_1 - \Theta_2$.

On a donc à la fois sur la figure, pour un point m quelconque, les deux flèches

$$Ok = f_1, \quad mk = f_2,$$

les deux tensions correspondantes

$$OK = \Theta_2, \quad MK = \Theta_1 \text{ (}^1\text{)},$$

le rapport des flèches ou des tensions

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \operatorname{tang} m OX,$$

---

(1) Il est à peine besoin de faire remarquer que, en prenant M comme correspondant de m, on a supposé, par cela même, que les Θ_2 étaient les abscisses et les Θ_1 les ordonnées.

la différence des tensions

$$BS = \Theta_1 - \Theta_2,$$

c'est-à-dire toutes les quantités utiles à connaître.

Le tracé graphique que nous venons d'indiquer a été établi en supposant que la vitesse du câble était assez faible pour qu'il fût permis d'admettre pour les tensions des deux brins les valeurs $\frac{pl^2}{2f_1}$ et $\frac{pl^2}{2f_2}$; il est facile, pour le cas des câbles à grande vitesse, de tenir compte de cette vitesse dans l'application de ce procédé.

On a, en effet, d'après les formules [(17)] et [(15)],

$$\Theta_1 = \frac{pl}{4m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}} + \frac{V^2}{114g};$$

si l'on remplace m par sa valeur tirée de l'équation [(6)], on trouve

$$\Theta_1 = \frac{pl^2}{2f_1} + \frac{V^2}{114g};$$

on obtient de même, par les équations [(18), (15) et (7)],

$$\Theta_2 = \frac{pl^2}{2f_2} + \frac{V^2}{114g};$$

on a enfin, pour le câble au repos,

$$\Theta_0 = \frac{pl^2}{2f_0};$$

en tirant f_0, f_1 et f_2 de ces trois équations et les portant dans la relation [(5)], il vient

$$\frac{1}{\left(\Theta_1 - \frac{V^2}{114g}\right)^2} + \frac{1}{\left(\Theta_2 - \frac{V^2}{114g}\right)^2} = \frac{2}{\Theta_0^2}.$$

La courbe des tensions représentée par cette équation varie dès lors avec V; mais il est facile de trouver Θ_1 et Θ_2, pour chaque valeur de V, en se servant de la courbe des tensions construite précédemment,

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{2}{\Theta_0^2};$$

on a, en effet,

$$\Theta_1 = y + \frac{V^2}{114g},$$

$$\Theta_2 = x + \frac{V^2}{114g},$$

ce qui permet d'obtenir immédiatement Θ_1 et Θ_2 sur la *fig.* 6, en ajoutant simplement à OK et KM, coordonnées de M, la troisième proportionnelle à V et $114g$. On obtient ainsi un point M' de la courbe des tensions cherchée.

Le rapport $\frac{\Theta_1}{\Theta_2}$ sera dès lors fourni par le coefficient angulaire de la droite OM', joignant l'origine au point M' de coordonnées Θ_1 et Θ_2, construites comme il vient d'être dit ([1]). Quant à la différence $\Theta_1 - \Theta_2$, elle n'aura pas changé et sera toujours égale à BS.

Il faut remarquer ici que, d'après ce qui précède, la courbe des tensions correspondant à une valeur de V n'est que la courbe des tensions de la *fig.* 6 correspondant à V égal à zéro, déplacée parallèlement à la bissectrice d'une quantité $\frac{V^2\sqrt{2}}{114g}$. La construction de cette dernière courbe donne donc immédiatement celle de la courbe des tensions pour une valeur particulière de V, et l'on a ainsi une construction graphique très simple fournissant, dans un cas quelconque, tous les éléments nécessaires à calculer pour l'établissement d'une transmission.

([1]) Ce coefficient angulaire représente le rapport des tensions k_1, tandis que le rapport des flèches k est donné par le coefficient angulaire de la droite OM_1 symétrique de OM par rapport à la bissectrice OB.

TROISIÈME PARTIE.

RÈGLES D'ÉTABLISSEMENT DES TRANSMISSIONS TÉLÉDYNAMIQUES.

I. — CONDITIONS QUE L'ON DOIT CHERCHER A RÉALISER DANS UNE TRANSMISSION TÉLÉDYNAMIQUE.

Lorsqu'on installe un câble, les conditions fondamentales auxquelles il doit satisfaire sont de ne pas glisser sur les poulies et de ne pas se rompre. Il faut aussi que, l'installation une fois faite, on n'ait besoin d'y retoucher qu'à des intervalles de temps assez éloignés. Il est nécessaire enfin que cette installation n'amène ni secousses brusques, ni irrégularité de vitesse, c'est-à-dire que le coefficient de fonctionnement soit maintenu entre des limites convenables.

Cette dernière considération est d'autant plus importante que les secousses trop fortes peuvent amener la chute du câble et rendre ainsi absolument impossible la transmission du mouvement.

Ces quatre ordres d'idées, le glissement, la résistance, les remaniements à effectuer et le fonctionnement sont d'une importance telle en pratique qu'il nous faut les examiner successivement pour déterminer les *desiderata* auxquels chacun d'eux conduit.

Nous rappellerons pour cela qu'un câble, une fois installé, ne se trouve jamais d'une manière absolument fixe dans les conditions qui ont été prévues lors de son établissement; il est exposé forcément à trois causes de modifications dans son état dynamique, savoir : les variations du travail résistant, les variations de longueur accidentelles dues aux changements de température ou d'humidité, enfin les variations de longueur permanentes, c'est-à-dire les allongements produits par l'usage.

Ceci posé, nous allons examiner l'influence de ces trois espèces de variations, sur une transmission, en nous plaçant successivement aux quatre points de vue qui viennent d'être exposés.

1° *Glissement.* — Les causes qui favorisent le glissement sont l'accroissement du travail résistant et les allongements. Il faudra donc que le câble soit établi de telle sorte que non seulement il n'y ait pas de glissement quand il vient d'être monté, mais encore que ce glissement ne puisse avoir lieu sous l'action des augmentations que peut éprouver le travail résistant, sous l'action des allongements accidentels auxquels le câble est exposé, ou sous l'action de l'allongement permanent produit après un certain temps de fonctionnement. Ces conditions seront évidemment satisfaites si le rapport des tensions k_0 a été choisi notablement inférieur à la limite supérieure qu'il pouvait atteindre d'après les conditions normales de la transmission au moment de la mise en place. Mais il faut remarquer que, si l'on diminuait k_0 outre mesure, on serait conduit à avoir un câble trop tendu, trop lourd, et des pressions exagérées sur les axes des poulies-câbles, d'où une dépense et une perte de force inutiles.

Il y a donc dans la pratique certaines limites à adopter pour k_0, afin d'éviter cet inconvénient tout en assurant l'adhérence pendant un temps suffisamment long.

2° *Résistance.* — Les causes qui augmentent la tension du câble sont l'accroissement du travail résistant et les raccourcissements accidentels ; il faut donc que le câble soit calculé de manière à pouvoir résister, non pas à l'effort moyen, mais à l'effort maximum qui peut résulter des deux causes dont il s'agit.

Remarquons aussi que les raccourcissements accidentels ont un effet d'autant plus puissant pour augmenter la tension que le câble est plus tendu. Il résulte de là que le câble devra être d'autant plus résistant que la flèche relative choisie au moment de la mise en place sera plus petite ; d'autre part, à mesure que cette flèche relative diminuera, le mouvement deviendra plus dur et plus saccadé. Il y a, par suite, une limite inférieure de flèche relative à ne pas dépasser, limite qui dépend de la grandeur des raccourcissements accidentels auxquels un câble est exposé, et que l'expérience seule peut fixer. Nous reviendrons sur ce point au § II.

3° *Remaniements à effectuer.* — La seule cause qui intervienne pour rendre nécessaire, au bout d'un certain temps de fonctionnement, le re-

maniement d'une transmission, c'est l'allongement permanent dû à l'usage. Il est en effet indispensable, quand cet allongement est trop considérable, de raccourcir le câble, pour éviter le glissement et pour rendre au mouvement la régularité nécessaire. A ce point de vue, le but à atteindre est que ces raccourcissements ne soient ni trop fréquents, ni trop difficiles ([1]). Pour qu'ils ne soient pas trop fréquents, il faut que la valeur admise pour le rapport des flèches, au moment de l'installation, soit suffisamment petite, c'est-à-dire que le câble soit suffisamment éloigné du glissement; pour qu'ils ne soient pas trop difficiles, il faut que l'on ait à réduire le câble d'une quantité assez forte pour pouvoir faire aisément une épissure ([2]). Cette dernière condition conduit, pour les petites portées, à avoir des câbles très peu tendus, c'est-à-dire présentant de grandes flèches relatives.

4° *Fonctionnement.* — Le coefficient de fonctionnement varie, comme nous l'avons vu au § II de la deuxième Partie, lorsque la longueur du câble varie; il diminue quand le câble s'allonge et augmente quand il se raccourcit. Nous avons reconnu qu'à ce point de vue il convenait de ne pas prendre de câbles trop tendus, afin d'éviter que ce coefficient ne varie dans des limites trop étendues sous l'influence du moindre allongement ou raccourcissement accidentel.

Le coefficient de fonctionnement sera d'ailleurs choisi dans chaque cas, par comparaison avec une transmission connue et marchant dans des conditions satisfaisantes. L'étude que nous avons faite des câbles équivalents nous permettra de faire cette comparaison quelle que soit la portée.

Les diverses considérations exposés dans ce paragraphe montrent que, avant d'aborder l'étude des règles pratiques à adopter pour l'établissement des transmissions télédynamiques, il convient, avant tout, de fixer par l'expérience les variations de longueur auxquelles un câble est exposé. L'amplitude de ces variations interviendra, en effet, dans la détermination

---

([1]) Le procédé d'étirage des câbles, dont il sera question au § III, a pour effet de diminuer dans une forte proportion les allongements permanents produits par l'usage.

([2]) Le système de joint par agrafes (*voir* § III), applicable dans le cas des petites forces, évite cette difficulté et permet de raccourcir aisément le câble, même quand les flèches sont très faibles.

du rapport des tensions et de la flèche relative qu'il faut admettre. Nous allons indiquer les résultats obtenus dans les essais entrepris à ce sujet.

II. — Expériences faites a la Poudrerie du Pont-de-Buis, pour la détermination des variations de longueur accidentelles que subit un cable sous l'influence des changements de température et d'humidité.

Les expériences que nous allons décrire ont été faites, sur notre demande, par M. Bérard, ingénieur des Poudres et Salpêtres, directeur de la poudrerie du Pont-de-Buis.

Elles ont duré pendant trois mois (mars, avril, mai 1876), c'est-à-dire à l'époque de l'année où les différences de température et d'état hygrométrique entre la nuit et le jour sont le plus sensibles. Elles ont eu lieu en Bretagne, où le climat est très humide, et dans une poudrerie située dans une vallée encaissée. Toutes les conditions se trouvaient donc réunies pour que l'on pût observer les maxima de variations de longueur accidentelles.

On opérait d'ailleurs sur un câble de faible diamètre ($0^m,005$) et formé de fils très fins ($0^m,0005$), ce qui le rendait plus sensible aux variations dont il s'agit.

La transmission sur laquelle les expériences ont été faites comprenait une partie horizontale ayant $32^m,45$ de portée et une partie inclinée correspondant à une portée de $19^m,80$; au point d'intersection de ces deux parties, le câble était soutenu par deux galets de support.

La poulie menante A (*fig.* 7), située à l'extrémité inférieure de la partie inclinée, était à $5^m,70$ au-dessous de la poulie conduite B.

Les flèches au repos f de la partie horizontale ont été mesurées directement à l'aide de règles graduées que l'on plaçait verticalement au milieu de la portée BC.

Quant aux flèches f' de la partie inclinée, qu'il était beaucoup plus difficile de mesurer exactement, à cause des accidents de terrain, on a évité leur détermination expérimentale de la manière suivante :

Soient :

$2l$ la distance horizontale de la poulie conduite B aux galets de renvoi C, C';

$2l'$ la distance horizontale de ces galets à la poulie menante A;

2λ la longueur de l'un des brins de la partie horizontale;

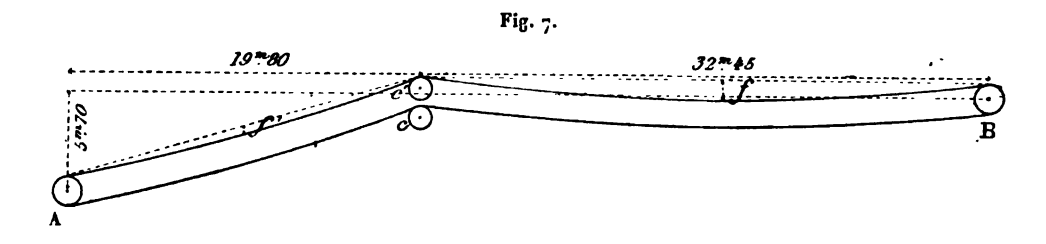
$2\lambda'$ la longueur de l'un des brins de la partie inclinée;

Λ la somme $\lambda + \lambda'$;

L la somme $l + l'$.

Transmission de la sècherie à la poudrerie du Pont-de-Buis (¹).

Fig. 7.



On exprime qu'il y a équilibre au repos en écrivant que la tension de la partie horizontale d'un brin à son arrivée sur le galet de renvoi est égale à la tension de la partie inclinée en son point d'enroulement sur le même galet.

Or, la première tension est, d'après ce que nous avons vu au § XVI de la deuxième Partie,

$$\Theta = \frac{pl^2}{2f},$$

et la deuxième est fournie (d'après la remarque faite au sujet des transmissions faiblement inclinées dans l'une des notes du § I de cette deuxième

(¹) A, poulie menante; B, poulie conduite; CC', galets de support; f, flèche au repos de la partie horizontale; f', flèche au repos de la partie inclinée.

Diamètre des poulies extrêmes, $1^m,50$; diamètre des galets, 1^m; nombre de fils, 60; diamètre des fils, $0^{mm},5$.

Partie) par la relation

$$\Theta' = \frac{p l'^2}{2 f'};$$

l'équation d'équilibre est donc

$$\frac{l^2}{f} = \frac{l'^2}{f'}. \tag{1}$$

Mais, d'un autre côté, l'on a [(formule 27), § I, deuxième Partie],

$$\lambda - l = \frac{2}{3}\frac{f^2}{l},$$

$$\lambda' - l' = \frac{2}{3}\frac{f'^2}{l'}.$$

On en déduit

$$\Lambda - \mathrm{L} = \frac{2}{3}\left(\frac{f^2}{l} + \frac{f'^2}{l'}\right),$$

et l'on en conclut

$$\frac{\Lambda - \mathrm{L}}{\mathrm{L}} = \frac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\frac{1 + \frac{f'^2}{f^2}\frac{l}{l'}}{1 + \frac{l'}{l}},$$

ou, en tenant compte de l'équation (1),

$$\frac{\Lambda - \mathrm{L}}{\mathrm{L}} = \frac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\frac{1 + \frac{l'^3}{l^3}}{1 + \frac{l'}{l}}.$$

Si nous remplaçons dans cette expression l et l' par leurs valeurs respectives 16,225 et 9,9, on a

$$\frac{\Lambda - \mathrm{L}}{\mathrm{L}} = \frac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\frac{1,227}{1,61},$$

ou enfin

$$\frac{\Lambda - \mathrm{L}}{\mathrm{L}} = \frac{f^2}{518}.$$

Cette formule donne l'excès relatif de longueur du câble sur la distance horizontale des poulies. L'allongement qui correspond au passage d'une flèche $f^{(1)}$ à une flèche $f^{(2)}$ est, dès lors,

$$\Lambda^{(1)} - \Lambda^{(2)} = \frac{\mathrm{L}}{518}\left(f^{(1)^2} - f^{(2)^2}\right),$$

et cette relation nous permet de calculer les allongements par la seule mesure directe des flèches f et sans qu'il soit nécessaire d'avoir les flèches f'.

Ceci posé, les expériences ont été faites de la manière suivante :

Afin de ne pas confondre les variations accidentelles de longueur avec les allongements permanents, on ne comparait entre elles que les variations produites pendant un court espace de temps (deux ou trois jours), et on s'assurait qu'à la fin de la période le câble avait repris sa longueur primitive. Chaque période se trouvait ainsi définie par deux minima de longueur qui devaient être sensiblement égaux et s'être produits à peu d'intervalle, et son amplitude par la différence entre les flèches minima et la flèche maxima observée dans l'intervalle.

Les résultats obtenus dans les vingt-quatre séries d'expériences qui ont été faites peuvent être résumés comme il suit [1] :

1° Une élévation de température fait allonger le câble; une augmentation d'humidité le fait raccourcir. Cette seconde cause de variation de longueur est beaucoup plus puissante que la première.

2° Chaque jour le minimum de longueur s'observe le matin, au lever du Soleil et le maximum, au milieu du jour, vers 1^h. Les plus petits minima ont lieu après des rosées abondantes, les plus grands maxima par les temps chauds et secs.

3° La période qui a donné la plus grande variation est la suivante :

Flèche primitive...........................	0,33
Flèche maxima..............................	0,73
Flèche finale..............................	0,32

(1) Il est clair que nous ne prétendons pas garantir l'exactitude *absolue* des résultats que nous allons indiquer; les expériences n'ont pas été assez nombreuses pour cela et l'impossibilité de mesurer directement la flèche de la partie inclinée ne permettait pas, d'ailleurs, une rigueur mathématique. Mais comme le but que nous cherchions à atteindre consistait tout simplement à trouver le plus grand allongement qu'un câble peut subir sous l'influence des variations atmosphériques; comme, d'un autre côté, il y a intérêt pour les applications à supposer cet allongement maximum plus grand qu'il est en réalité, afin de n'atteindre jamais le cas limite, il suffisait d'avoir une valeur approchée de cet allongement, pourvu que cette valeur fût par excès.

C'est ainsi que les expériences ont été dirigées et c'est dans cet ordre d'idées que, en attendant de nouveaux essais, nous admettrons les résultats auxquels nous avons été conduit.



4° Afin d'exagérer l'effet de l'humidité, qui est prépondérant, on a mouillé le câble ; on a obtenu alors les chiffres qui suivent :

Flèche maxima........................	0,70
Flèche après mouillage.....................	0,35
Flèche le lendemain.......................	0,72

Ces résultats montrent que le mouillage direct est moins puissant que la rosée [1].

Le Tableau n° 20 donne les valeurs de l'allongement relatif pour les deux expériences dont nous venons de parler.

TABLEAU N° 20.

Valeurs de f.	Valeurs de $\frac{A-L}{L}$.	Différences.
0,33	0,00021	
		0,00082
0,73	0,00103	
		0,00083
0,32	0,00020	
0,70	0,00095	
		0,00071
0,35	0,00024	
		0,00076
0,72	0,00100	

Nous admettrons dès lors que l'allongement de longueur d'un câble résultant du passage d'une température basse et très humide à une température chaude et sèche peut être fixé aux $\frac{8}{10000}$ de la portée $2l$, soit à

$$\frac{2l}{1250}.$$

Nous verrons au § IV les conséquences qui en résultent pour la détermination de la flèche relative à adopter au moment du montage.

(1) Il faut remarquer que le câble employé était goudronné, comme le sont d'ordinaire les câbles télédynamiques.

III. — Variations de longueur permanente. Moyens de les déterminer ou d'y remédier.

Les inconvénients dus aux allongements que subit un câble par l'usage sont très notablement diminués quand on fait subir à ce câble un étirage préalable énergique, et des machines spéciales ont été construites dans ce but [1]. Quoi qu'il en soit, un câble en service s'allonge toujours peu à peu, la régularité du mouvement diminue d'une façon continue, l'adhérence sur les poulies est de moins en moins assurée et, au bout d'un certain temps, le glissement commençant à se produire, il est nécessaire de raccourcir le câble.

Ce raccourcissement s'opère d'ordinaire à l'aide d'une épissure faite sur une longueur assez considérable. Pour que cette épissure soit facile à exécuter, il faut que le raccourcissement à opérer atteigne une certaine importance. Ainsi, avec les câbles de $0^m,10$ à $0^m,015$ de diamètre, ce raccourcissement doit être supérieur à $0^m,10$ ou $0^m,15$ et, avec les câbles plus forts, il faut encore augmenter cette limite.

Une autre raison d'ailleurs vient s'ajouter à la précédente pour montrer l'intérêt qu'il y a en pratique à ce qu'un câble n'ait besoin d'être retendu que lorsque le raccourcissement à lui faire subir atteint une valeur notable. Si cette condition, en effet, n'était pas réalisée, on serait obligé de refaire l'épissure très souvent, ce qui fatiguerait le câble outre mesure.

Or nous avons vu (§ II de la deuxième Partie) que, en désignant par m la flèche relative au repos et par m' la valeur à partir de laquelle il convenait d'opérer un raccourcissement, l'allongement du câble, c'est-à-dire la quantité à retrancher, était

$$\frac{16}{3}(m'^2 - m^2)\,2l.$$

---

[1] L'inventeur de ces machines est M. Ziegler, de Zurich. Pour donner une idée de l'allongement qu'elles produisent, nous citerons l'exemple suivant, extrait du travail de M. Achard. Le câble principal de Fribourg a été, par ce moyen, réduit du diamètre de $0^m,0295$ à celui de $0^m,027$ et allongé dans la proportion de 0,85 pour 100.

Il faut donc, d'après ce qui vient d'être dit, que cette quantité ne soit pas inférieure à une certaine limite, afin que les raccourcissements à faire ne soient ni trop fréquents ni trop difficiles.

D'un autre côté, il a été établi, aux §§ IX et X de la deuxième Partie, que m ne devait pas varier dans des limites trop étendues, sous peine de modifier trop notablement les conditions de fonctionnement du câble. D'après cela, l'expression précédente, qui peut s'écrire

$$\frac{16}{3}\left(\frac{m'^2}{m^2}-1\right)2m^2 l,$$

devant être plus grande qu'une limite donnée, et $\frac{m'}{m}$ ne pouvant dépasser un certain maximum, on voit que m a une valeur minimum, qui d'ailleurs est d'autant plus grande que la portée est plus petite.

Afin que l'on puisse mieux se rendre compte de la grandeur des raccourcissements à faire, nous avons établi le Tableau suivant, qui donne la différence entre la longueur d'un brin d'un câble et la portée.

En résumé donc, lorsqu'on emploie un câble non étiré préalablement et lorsque les raccourcissements à faire doivent être opérés à l'aide d'épissures, il est nécessaire, pour que ces épissures puissent être exécutées facilement, que la flèche relative du câble ne soit pas plus petite qu'une certaine limite, et cette limite est d'autant plus grande que la portée est plus faible.

Une remarque doit être faite ici : les allongements d'une corde sous l'action d'une tension étant généralement proportionnels à sa longueur, on pourrait croire qu'il en sera de même pour les allongements permanents d'un câble et que les allongements relatifs seront les mêmes, au bout d'un même temps, quelle que soit la portée. Mais il faut observer que c'est au moment de l'incurvation qu'a lieu le plus grand effort de tension, et que, toutes choses égales d'ailleurs, les incurvations d'un même élément se répètent d'autant plus fréquemment que le câble est plus court. Il résulte de là que les câbles courts s'allongent plus rapidement que les câbles longs, et s'usent aussi plus vite.

TABLEAU N° 21.

Différence entre la longueur d'un brin d'un câble et la portée.

VALEURS de la flèche relative au repos *m*.	VALEURS DE LA PORTÉE												
	20m.	30m.	40m.	50m.	60m.	70m.	80m.	90m.	100m.	120m.	140m.	160m.	200m.
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
$\frac{1}{100}$	0,005	0,008	0,011	0,013	0,016	0,019	0,021	0,024	0,027	0,032	0,037	0,043	0,053
$\frac{1}{80}$	0,009	0,013	0,017	0,021	0,025	0,029	0,033	0,038	0,042	0,050	0,058	0,067	0,083
$\frac{1}{60}$	0,015	0,022	0,030	0,037	0,045	0,052	0,,59	0,069	0,074	0,089	0,104	0,119	0,148
$\frac{1}{50}$	0,020	0,032	0,043	0,053	0,067	0,075	0,085	0,097	0,107	0,129	0,147	0,173	0,213
$\frac{1}{40}$	0,033	0,050	0,067	0,083	0,100	0,117	0,133	0,150	0,167	0,200	0,233	0,267	0,333
$\frac{1}{30}$	0,059	0,089	0,119	0,148	0,178	0,208	0,237	0,267	0,296	0,356	0,415	0,474	0,593
$\frac{1}{20}$	0,133	0,200	0,267	0,333	0,400	0,466	0,533	0,600	0,667	0,800	0,933	1,067	1,333
$\frac{1}{15}$	0,237	0,356	0,474	0,593	0,711	0,830	0,948	1,067	1,185	1,422	1,659	1,896	2,370
$\frac{1}{12}$	0,370	0,556	0,741	0,926	1,111	1,296	1,481	1,667	1,852	2,222	2,593	2,963	3,703

On emploie depuis quelque temps, pour éviter les épissures, un système d'agrafe d'un emploi très commode, mais qui n'est applicable que pour les câbles de dimensions faibles, transmettant de petites forces. Ce système est constitué par deux douilles coniques que l'on peut réunir base à base à l'aide d'une goupille. Chaque extrémité du câble est introduite dans l'une des douilles par la petite base, et y est maintenue à l'aide d'une vis située à l'intérieur de la douille et qui, en pénétrant dans le câble, suivant l'axe, en augmente la section.

IV. — Détermination du minimum de flèche relative au repos a adopter selon la portée.

Nous avons vu, dans la première note du § II de la deuxième Partie, qu'une même variation relative de longueur du câble produisait une variation de la flèche relative m d'autant plus grande que cette flèche était plus petite; nous avons aussi démontré, dans la deuxième note du même paragraphe, qu'il en était de même pour la tension θ_1, et nous avons établi qu'il était nécessaire, pour éviter des efforts dangereux, que le câble ne fût pas trop tendu.

Nous allons chercher maintenant, en nous appuyant sur les résultats des deux paragraphes précédents, quelle est la limite inférieure de flèche relative à adopter pour éviter cet inconvénient.

Dans ce but, nous emploierons la méthode suivante :

On a montré (§ II, deuxième Partie, deuxième note) que l'accroissement de tension résultant d'une variation de longueur du câble était donné par la formule

$$\frac{d\theta_1}{\theta_1 - \frac{V^2}{114g}} = -\frac{d\lambda}{l}\,\frac{3}{16}\,\frac{1}{m^2}\,\frac{1+k^2}{1+k^3}.$$

On sait aussi (§ II, troisième Partie) que le raccourcissement maximum à craindre sous l'action des variations atmosphériques est $\frac{1}{1250}$ de la portée; on pourra dès lors, par la formule précédente, savoir quelle est l'augmentation maxima de tension à redouter. En exprimant alors que cet accroissement de tension est plus petit que la valeur qui le rendrait dangereux pour le mécanisme, on aura une limite inférieure de la flèche relative m.

Pour faire ce calcul, remarquons que l'expression

$$\frac{1+k^2}{1+k^3},$$

qui figure dans la valeur de l'accroissement de tension, est plus petite que l'unité, puisque k est plus grand que 1 et qu'elle va en décroissant quand k

augmente. On peut donc poser

$$\frac{d\theta_1}{\theta_1 - \frac{V^2}{114g}} < -\frac{d\lambda}{l}\frac{3}{16}\frac{1}{m^2},$$

et, lorsque $-\frac{d\lambda}{l}$ est égal à $\frac{1}{1250}$, on en déduit

$$\frac{d\theta_1}{\theta_1 - \frac{V^2}{114g}} < \frac{3}{20000}\frac{1}{m^2}.$$

Si l'on s'impose alors la condition que la tension ne puisse augmenter de plus de $\frac{1}{4}$ de sa valeur, ce qui, en raison des valeurs ordinaires de θ_1 pour les transmissions existantes, paraît être le maximum que l'on doive admettre dans une règle générale embrassant tous les cas, on sera sûr de ne pas atteindre ce maximum d'excès de tension, lorsqu'on aura

$$\frac{3}{20000}\frac{1}{m^2} < \frac{1}{4},$$

d'où l'on tire

$$m > \frac{1}{40}.$$

Ainsi donc, nous pouvons énoncer la règle suivante :

Lorsqu'un câble est exposé aux variations atmosphériques, il suffit, pour éviter qu'elles puissent donner lieu à des efforts dangereux, de prendre pour la flèche au repos une valeur au moins égale à $\frac{1}{40}$ de la portée (¹).

Cette règle étant admise, examinons les conséquences qui résultent des variations de longueur permanentes que nous avons étudiées dans le paragraphe précédent.

(¹) La règle énoncée ici a été établie en s'appuyant sur les expériences faites au Pont-de-Buis, c'est-à-dire dans un climat exceptionnellement humide; il est donc clair que le chiffre de $\frac{1}{40}$ est un maximum, qu'en toute rigueur il faudrait donner une règle différente pour chaque pays et que, dans certains cas, des câbles plus tendus que ceux indiqués pourraient bien fonctionner. Mais comme la diminution de la flèche ne donne lieu, par la diminution de longueur du câble, qu'à une économie tout à fait insignifiante, nous croyons pouvoir recommander la règle indiquée dans le texte et qui consiste à prendre pour flèche relative au repos, lors de l'installation, le $\frac{1}{40}$ de la portée.

Nous avons reconnu que le raccourcissement à opérer par suite de l'allongement dû à l'emploi était représenté par

$$\frac{16}{3}(m'^2 - m^2)\,2l,$$

en désignant par m la flèche relative au repos au moment du montage et par m' la valeur de cette flèche relative si le câble allongé était au repos.

Nous avons dit de plus que le raccourcissement à faire devait être plus grand qu'une certaine limite pour que l'épissure fût facile. Cette limite $\mathcal{L}$ varie naturellement avec la grosseur et la raideur du câble, et l'on peut admettre, d'après les résultats de l'expérience, qu'elle est de $0^m,10$ pour les petits câbles et de $0^m,30$ pour les câbles de très gros diamètre. On a donc la condition

$$\frac{16}{3}(m'^2 - m^2)\,2l > \mathcal{L},$$

qui peut s'écrire

$$2l > \frac{\frac{3}{16}\mathcal{L}\frac{1}{m^2}}{\frac{m'^2}{m^2} - 1}.$$

Le Tableau suivant donne les valeurs de cette limite inférieure de portée selon les valeurs de m et de $\mathcal{L}$.

TABLEAU N° 22.

Limite inférieure de la portée, au point de vue de la facilité d'exécution de l'épissure.

m.	$\mathcal{L}$				
	$0^m,10.$	$0^m,15.$	$0^m,20.$	$0^m,25.$	$0^m,30.$
$\frac{1}{40}$	$\frac{30}{\frac{m'^2}{m^2}-1}$	$\frac{45}{\frac{m'^2}{m^2}-1}$	$\frac{60}{\frac{m'^2}{m^2}-1}$	$\frac{75}{\frac{m'^2}{m^2}-1}$	$\frac{90}{\frac{m'^2}{m^2}-1}$
$\frac{1}{20}$	$\frac{7,50}{\frac{m'^2}{m^2}-1}$	$\frac{11,20}{\frac{m'^2}{m^2}-1}$	$\frac{14,95}{\frac{m'^2}{m^2}-1}$	$\frac{18,70}{\frac{m'^2}{m^2}-1}$	$\frac{22,40}{\frac{m'^2}{m^2}-1}$
$\frac{1}{15}$	$\frac{4,20}{\frac{m'^2}{m^2}-1}$	$\frac{6,30}{\frac{m'^2}{m^2}-1}$	$\frac{8,40}{\frac{m'^2}{m^2}-1}$	$\frac{10,50}{\frac{m'^2}{m^2}-1}$	$\frac{12,60}{\frac{m'^2}{m^2}-1}$

Les valeurs fournies par le Tableau précédent pour la limite inférieure de la portée dépendent de la quantité $\frac{m'}{m}$; la détermination de cette quantité peut être obtenue à l'aide des considérations suivantes :

On sait [(25)] que le coefficient de fonctionnement est, pour une même portée, proportionnel à

$$\frac{1}{m^2}\frac{(k^2+1)(k^3+1)}{k^2(k-1)};$$

or, lorsque k est voisin de l'unité, le coefficient de $\frac{1}{m^2}$ est sensiblement proportionnel à $\frac{1}{k-1}$; lorsque, au contraire, k est voisin de 2, ce coefficient peut être regardé comme constant, ainsi qu'on peut le constater en consultant le Tableau n° **12**. Il est dès lors permis de dire que le coefficient de fonctionnement varie comme $\frac{1}{m^2}$, lorsque la valeur de k est voisine de 2, et comme $\frac{1}{m^2(k-1)}$, ou, si l'on veut, comme $\frac{1}{m^3}$ quand cette valeur est voisine de l'unité (*voir* § XIII de la deuxième Partie).

Mais ce coefficient de fonctionnement n'est pas assujetti à conserver une valeur invariable, et ce que l'on doit chercher à réaliser dans la pratique, c'est que, depuis le moment où le câble est installé jusqu'à celui où, par suite de l'allongement, il devient nécessaire de le retendre, le coefficient de fonctionnement reste compris entre certaines limites. Il est clair que ces limites varient suivant la nature du travail effectué, c'est-à-dire suivant le degré de régularité qu'il convient de s'imposer. Mais l'expérience montre que, dans les cas ordinaires de la pratique, on peut admettre comme règle moyenne que le rapport entre les limites dont il s'agit ne doit pas dépasser 2.

Ceci posé, on voit que, pour les valeurs de k voisines de 2, le coefficient de fonctionnement, qui était proportionnel à $\frac{1}{m^2}$, devenant proportionnel à $\frac{1}{m'^2}$, il résulte, de ce qui vient d'être dit, que $\frac{m'}{m}$ devra être compris entre 1 et $\sqrt{2}$.

De même, pour les valeurs de k voisines de l'unité, le coefficient de

fonctionnement étant alors proportionnel à $\frac{1}{m^3}$, on en conclut que $\frac{m'}{m}$ doit être compris entre 1 et $\sqrt[3]{2}$.

En résumé donc, *pour que l'allongement permanent du câble ne puisse faire varier le coefficient de fonctionnement dans des limites trop étendues depuis le moment de l'installation jusqu'à celui où le glissement va se produire, il faut que* $\frac{m'}{m}$ *soit inférieur à* 1,41 *lorsque* k *est voisin de* 2 *et à* 1,26 *lorsque la valeur de* k *est peu différente de l'unité.*

Dans ces conditions, le Tableau n° **22** donne les résultats inscrits au Tableau qui suit :

TABLEAU N° 23.

Limite inférieure de la portée, au point de vue de la facilité d'exécution des épissures (1).

m.	RACCOURCISSEMENT A OPÉRER				
	$0^m,10$.	$0^m,15$.	$0^m,20$.	$0^m,25$.	$0^m,30$.
$\frac{1}{40}$	30 m **51**	45, m **77**	60 m **102**	75 m **128**	90 m **154**
$\frac{1}{20}$	7,5 **12,8**	11,2 **19,1**	15 **25,6**	18,7 **32**	22,4 **38,2**
$\frac{1}{15}$	4,2 **7,2**	6,3 **10,7**	8,4 **14,4**	10,5 **19,7**	12,6 **21,4**

Nous remarquerons ici que le raccourcissement à opérer, qui est, comme nous l'avons vu,

$$\frac{16}{3}(m'^2 - m^2)2l,$$

(1) Les petits chiffres dans ce Tableau correspondent à k, voisin de 2, et les gros chiffres à k voisin de l'unité.

devient, si l'on remplace $\frac{m'}{m}$ par $\sqrt{2}$ ou par $\sqrt[3]{2}$.

$$\frac{16}{3} 2m^2 l \quad \text{pour } k \text{ voisin de } 2,$$

$$\frac{9,4}{3} 2m^2 l \quad \text{pour } k \text{ voisin de } 1.$$

En pratique, on peut admettre comme règle générale, en raison des diamètres de câbles habituellement employés, qu'un raccourcissement de $0^m,20$ permet d'effectuer l'épissure. De plus, k est d'ordinaire voisin de 2. On conclut de là, d'après les résultats consignés au Tableau précédent, que, pour les distances égales ou supérieures à 60^m, la règle du $\frac{1}{40}$ permet toujours la réfection de l'épissure.

Dans le cas où la portée serait plus petite que 60^m, et en supposant, comme précédemment, k voisin de 2, il faudrait, pour que le raccourcissement à effectuer fût au moins égal à $0^m,20$, que l'on eût

$$\frac{16}{3} 2m^2 l \geq 0,2,$$

d'où l'on conclut

$$m \geq \frac{1}{20}\sqrt{\frac{15}{2l}};$$

on est ainsi conduit à la règle suivante :

Pour que les raccourcissements rendus nécessaires par les allongements permanents puissent être effectués facilement par épissure, il suffit de prendre, dans le cas des portées égales ou supérieures à 60^m, *une flèche relative au repos de* $\frac{1}{40}$ *et, dans le cas des portées inférieures à* 60^m, *une flèche relative au repos représentée par*

$$\frac{1}{20}\sqrt{\frac{15}{2l}}.$$

Le Tableau suivant donne les valeurs minima de la flèche relative pour les diverses portées.

TABLEAU N° 24.

	VALEURS DE LA PORTÉE																	
	15m.	20m.	25m.	30m.	35m.	40m.	45m.	50m.	55m.	60m.	65m.	70m.	75m.	80m.	85m.	90m.	95m.	100m et au delà.
Minimum de la flèche relative au repos pour k voisin de 2.	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$
Minimum de la flèche relative au repos pour k voisin de 1.	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{29}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{37}$	$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{40}$

Il est bien entendu que ce Tableau s'applique seulement à des câbles exposés aux variations atmosphériques, et dans lesquels les raccourcissements à effectuer s'opèrent par des épissures [1]. Si l'on employait le système des agrafes, la règle du $\frac{1}{40}$ pourrait être adoptée à toutes les portées, et s'il s'agissait de câbles placés dans des locaux fermés, où les variations de température et d'humidité seraient très faibles, la flèche relative au repos pourrait être prise alors inférieure à $\frac{1}{40}$. Mais il ne conviendrait pas néanmoins de descendre beaucoup au-dessous de cette limite, car il faut faire la part des petites erreurs de raccourcissement, qui, dans le cas des flèches trop faibles, prennent une importance considérable.

V. — Détermination de la limite supérieure a admettre pour la somme des tensions $\theta_1 + \sigma$.

On a admis jusqu'ici, d'une façon générale, qu'au point de vue de la résistance d'un câble il était permis, dans l'établissement des projets de transmission, lorsqu'on pouvait compter sur du fer de qualité supérieure, de

[1] Il faut remarquer ici que, pour les petites distances, on ne transmet d'ordinaire que de petites forces et que l'on peut dès lors, en général, employer le système d'agrafes à vis dans le cas des portées faibles.

prendre pour limite maxima de la somme des tensions $\theta_1 + \sigma$, 18^{kg} par millimètre carré.

Mais, dans l'application de cette règle, on ne tient pas compte de la force centrifuge, et l'on évalue θ_1 comme si le câble était au repos ou animé d'une vitesse très faible. On néglige également les accroissements de tension dus aux raccourcissements produits par les variations atmosphériques. Il est donc nécessaire que nous reprenions cette question fondamentale.

Un câble en mouvement supporte une tension totale qui est la somme de trois tensions partielles : 1° la tension due à son poids; 2° la tension d'incurvation σ; 3° la tension produite par la force centrifuge. De plus, il est exposé aux accroissements de tension résultant des raccourcissements accidentels qu'il peut subir.

Pour que la résistance du câble soit assurée en toute circonstance, il faut que la somme des trois premières tensions et de la valeur maxima que peut prendre la quatrième ne dépasse pas 18^{kg} par millimètre carré ([1]).

Or nous avons vu (Tableau n° 3, deuxième Partie) que, pour une vitesse de 25^{m}, vitesse que l'on dépasse rarement, la tension due à la force centrifuge était d'environ $0^{kg},500$.

D'autre part, nous savons qu'avec la règle du $\frac{1}{40}$ l'excès de tension maximum qui peut se produire par les raccourcissements accidentels est de $\frac{1}{4}$ de la tension θ_1. Or d'ordinaire θ_1 ne dépasse pas 10^{kg}; on peut donc regarder l'excès de tension dont il s'agit comme au plus égal à $2^{kg},500$.

Il résulte de là que la somme $\theta_1 + \sigma$ doit être inférieure ou égale à 15^{kg} pour que la tension totale ne dépasse pas 18^{kg} par millimètre carré, c'est-à-dire pour que la condition de résistance soit satisfaite.

Nous remplacerons donc la règle indiquée par M. Reuleaux et adoptée en général aujourd'hui, $\theta_1 + \sigma = 18^{kg}$, par la règle $\theta_1 + \sigma = 15^{kg}$ et sous la réserve que, lorsque θ_1 sera supérieur à 10^{kg} et V supérieur à 25^{m}, la somme $\theta_1 + \sigma$ sera encore abaissée et prise égale aux chiffres correspondants du Tableau suivant.

([1]) Et même 15^{kg}, si l'on n'est pas certain de l'excellente qualité du fer.

Ce Tableau donne d'ailleurs, pour les diverses valeurs de θ_1 et de V, les valeurs maxima à admettre pour $\theta_1 + \sigma$.

TABLEAU N° 25 (¹).

Valeurs à adopter pour $\theta_1 + \sigma = \chi$.

θ_1.	V = 10ᵐ.	V = 15ᵐ.	V = 20ᵐ.	V = 25ᵐ.	V = 30ᵐ.	V = 35ᵐ.	V = 40ᵐ.	V = 45ᵐ.	V = 50ᵐ.
kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg
4	16,90	16,80	16,65	16,50	16,25	16,00	15,70	15,30	14,95
5	16,65	16,55	16,40	16,25	16,00	15,75	15,45	15,05	14,70
6	16,40	16,30	16,15	16,00	15,75	15,50	15,20	14,80	14,45
7	16,15	16,05	15,90	15,75	15,50	15,25	14,95	14,55	14,20
8	15,90	15,80	15,65	15,50	15,25	15,05	14,70	14,30	13,95
9	15,65	15,55	15,40	15,25	15,00	14,75	14,45	14,05	13,70
10	15,40	15,30	15,15	15,00	14,75	14,50	14,20	13,80	13,45
11	15,15	15,05	14,90	14,75	14,50	14,25	13,95	13,55	13,20
12	14,90	14,80	14,65	14,50	14,25	14,00	13,70	13,30	12,95

Nous pouvons maintenant résumer les règles pratiques auxquelles ce travail nous a conduit pour l'établissement des transmissions télédynamiques.

VI. — Règles pratiques a suivre dans l'établissement des transmissions télédynamiques.

Nous rappellerons tout d'abord les différents résultats auxquels nous sommes parvenus dans le cours de ce Mémoire.

1° Lorsqu'on augmente la vitesse d'un câble, son fonctionnement reste le même et le travail transmis augmente proportionnellement. L'adhérence ne varie pas si k est fixe, mais la tension du câble augmente et l'on peut craindre, pour une vitesse trop grande, sa rupture ou celle des poulies.

On évite aisément la rupture du câble en lui donnant une section suffi-

(¹) Les valeurs inscrites dans ce Tableau sont telles, qu'en les adoptant pour $\theta_1 + \sigma$ et en prenant une flèche relative au repos de $\frac{1}{40}$, on est sûr que la tension totale du brin moteur ne dépassera jamais 18ᵏᵍ par millimètre carré, même au moment du plus grand raccourcissement possible.

sante. Quant aux poulies, on ne peut diminuer l'action de la force centrifuge qui tend à les rompre qu'en augmentant leur diamètre; mais l'on est limité dans cette augmentation par les difficultés d'exécution et d'installation, surtout avec des poulies de fonte, et il convient, pour les grandes vitesses, d'employer les poulies à jante de fer, qui permettent d'atteindre la vitesse de 50^m par seconde (§ II de la deuxième Partie).

2° La condition d'adhérence du câble sur les poulies est

$$\frac{\theta_1 - \frac{V^2\Delta}{1000g}}{\theta_2 - \frac{V^2\Delta}{1000g}} < e^{fA},$$

et elle peut s'exprimer par cette règle que le rapport des flèches k doit être plus petit que e^{fA} (§ III de la deuxième Partie).

3° Le rapport des tensions diffère toujours du rapport des flèches; il lui est inférieur, et la différence augmente quand la vitesse croît ou quand la tension θ_1 du brin moteur diminue (§ IV de la deuxième Partie).

4° C'est dans le cas des petites tensions et par suite, en général, dans le cas des petites portées, qu'il importe de tenir compte de la nouvelle règle d'adhérence indiquée plus haut, surtout quand la vitesse est un peu considérable (§ IV de la deuxième Partie).

5° Lorsqu'on augmente la vitesse d'un câble, en laissant constante la tension θ_1, le travail ne varie pas proportionnellement à la vitesse et il s'annule au moment où l'on a

$$V = \sqrt{114g(\theta_1 - \theta_0)},$$

θ_0 étant la tension au repos (§ V de la deuxième Partie).

6° Lorsqu'on se donne *a priori* les valeurs de la portée, du rapport des flèches, de la flèche relative au repos et de la tension totale $\theta_1 + \sigma$, il y a toujours deux câbles ayant le même nombre de fils et susceptibles de transmettre le même travail; l'un plus lourd et formé de fils plus gros, l'autre plus léger et composé de fils plus fins.

Le premier donne une régularité plus grande, et le second est plus économique (§ VII de la deuxième Partie).

7° A égalité de flèche relative au repos, d'adhérence, de limite de tension, pour les mêmes poulies et le même câble, le mouvement est plus doux, moins saccadé dans les câbles à grande portée que dans les câbles à portée faible (§ XII de la deuxième Partie).

8° Les variations atmosphériques produisent sur les flèches et sur les tensions un effet d'autant plus considérable que le câble est plus tendu (§ XIII de la deuxième Partie).

9° Les allongements du câble produits soit par l'usage, soit par une élévation de température, soit surtout par une diminution d'humidité, ont pour effet de diminuer l'adhérence sur les poulies. Les raccourcissements, dus à un abaissement de température ou à une augmentation d'humidité, élèvent de la même quantité la tension des deux brins et accroissent la régularité du mouvement (§ XIII de la deuxième Partie).

10° On ne doit pas employer des câbles trop tendus, afin d'éviter qu'un léger raccourcissement produise des efforts dangereux au point de vue de la résistance et que le mouvement soit trop saccadé (§ XIII de la deuxième Partie).

14° Pour que l'on puisse obtenir une transmission équivalente à une transmission donnée, la flèche relative m restant la même, il faut que la nouvelle portée ne soit pas trop petite et, dans ce cas, il suffit de prendre pour le nouveau rapport des flèches k une valeur telle que la quantité $\frac{k^2(k-1)}{(1+k^2)(1+k^3)}$ ait, pour les deux câbles, deux valeurs inversement proportionnelles à leurs portées (§ XV de la deuxième Partie).

15° Pour que l'on puisse obtenir une transmission équivalente à une transmission donnée, le rapport des flèches k restant le même, il faut que la nouvelle portée ne soit pas trop grande et, dans ce cas, il suffit de prendre pour la flèche relative une valeur telle que les deux flèches relatives soient en raison inverse des racines carrées des portées (§ XV de la deuxième Partie).

16° Il résulte des théorèmes précédents que l'on peut toujours obtenir une transmission équivalente à une transmission donnée, pour une portée différente, soit en laissant la flèche relative m constante quand la portée

augmente, soit en laissant fixe le rapport des flèches k quand la portée diminue (§ XV de la deuxième Partie).

17° L'allongement d'un câble résultant du passage d'une température basse et très humide à une température chaude et sèche peut être fixé aux $\frac{8}{10000}$ de la portée (§ II de la troisième Partie).

18° Lorsqu'un câble est exposé aux variations atmosphériques, il suffit, pour éviter qu'elles puissent donner lieu à des efforts dangereux, de prendre pour la flèche au repos une valeur au moins égale à $\frac{1}{40}$ de la portée (§ IV de la troisième Partie).

19° Pour que l'allongement permanent d'un câble ne fasse pas varier le coefficient de fonctionnement dans des limites trop étendues, depuis le moment de l'installation jusqu'à celui où le glissement va se produire, il suffit que le rapport $\frac{m'}{m}$ des flèches relatives au repos à ces deux instants soit inférieur à $\sqrt{2}$ lorsque le rapport des tensions est voisin de 2, et à $\sqrt[3]{2}$ lorsque ce rapport est peu différent de l'unité (§ IV de la troisième Partie).

20° Pour que les raccourcissements rendus nécessaires par les allongements permanents puissent être effectués facilement par épissure, il suffit de prendre, dans le cas des portées égales ou supérieures à 60^{m}, une flèche relative au repos de $\frac{1}{40}$ et, dans le cas des portées inférieures à 60^{m}, une flèche relative au repos représentée par $\frac{1}{20}\sqrt{\frac{15}{2l}}$ (§ IV de la troisième Partie).

21° Pour que la résistance du câble soit assurée en toute circonstance, il suffit, lorsque la tension du brin moteur θ_1 est au plus égale à 10^{kg} par millimètre carré et la vitesse au plus égale à 25^{m}, de poser la condition

$$\theta_1 + \sigma = 15^{kg},$$

σ étant la tension d'incurvation et θ_1 étant calculé comme si le câble était au repos (§ V de la troisième Partie).

Tels sont les principaux résultats pratiques auxquels nous avons été conduit ; les uns ne sont que des indications utiles à se rappeler lorsqu'on in-

stalle une transmission, les autres constituent des règles formelles. Les premiers permettent de choisir, dans chaque cas, parmi les diverses solutions possibles, celle qui répond le mieux aux conditions spéciales du problème que l'on traite; les seconds doivent être observés dans tous les cas. Nous résumons ces derniers dans le Tableau suivant; ce sont les conditions fondamentales d'installation des transmissions télédynamiques.

Condition pour que le câble ne glisse pas sur les poulies.	$\dfrac{\theta_1 - \dfrac{V^2\Delta}{1000g}}{\theta_2 - \dfrac{V^2\Delta}{1000g}} < e^{f\Lambda}$ ou $k < e^{f\Lambda}$.
Condition pour que le câble ne se rompe pas.	$\theta_1 + \sigma = 15^{kg}$.
Condition pour éviter les efforts dangereux produits par les raccourcissements dus aux variations atmosphériques.	$m \geq \dfrac{1}{40}$.
Condition pour que le fonctionnement ne varie pas dans des limites trop étendues par suite des allongements permanents.	$\dfrac{m'}{m} \leq \sqrt{2}$. $\left(\dfrac{m'}{m} \leq \sqrt[3]{2}\right.$ dans le cas particulier où k serait voisin de 1$\left.\right)$.
Conditions pour que les épissures soient faciles à exécuter.	$m \geq \dfrac{1}{40}$ pour les portées supérieures à 60^m. $m \geq \dfrac{1}{20}\sqrt{\dfrac{15}{2l}}$ pour les portées inférieures à 60^m.

Toute transmission dans laquelle ces conditions seront satisfaites et dont les éléments auront été calculés à l'aide des formules données au § I de la deuxième Partie fonctionnera d'une manière régulière. On connaîtra la portée et le nombre de chevaux à transmettre; on se donnera la vitesse du câble et le nombre de fils qui le forment; on choisira la flèche relative m et le rapport des tensions k, et ces six quantités permettront, avec la relation $\theta_1 + \sigma = 15^{kg}$, de déterminer tous les éléments de la transmission.

Il est bien clair d'ailleurs que, si l'on est conduit par les valeurs admises pour les quantités dont il s'agit à des dimensions inadmissibles pour certains éléments, il suffira de modifier les données dans le sens reconnu nécessaire

et de prendre d'autres valeurs, ou pour la vitesse, ou pour le nombre de fils, ou pour les quantités m et k.

Ceci suffit pour indiquer comment doit être menée une étude de transmission télédynamique. Mais il faut remarquer que l'on aura toujours une infinité de solutions pour un problème donné, c'est-à-dire que l'on pourra toujours trouver une infinité de câbles qui, pour la même vitesse et le même nombre de fils, satisferont à la question proposée, sans exiger des fils de dimension inusitée ou des poulies de diamètre irréalisable. Cela résulte de ce que m et k ne sont assujettis qu'à satisfaire à des inégalités. Tous ces câbles différeront par leur fonctionnement, et, pour choisir celui qui conviendra le mieux, il faudra tenir compte de la nature du travail à effectuer ou, si l'on veut, du degré de régularité relative qu'il nécessite.

Nous allons nous placer maintenant à ce point de vue, afin d'arriver à condenser tous les résultats de ce travail dans des Tableaux numériques, et de permettre ainsi de trouver immédiatement tous les éléments d'une transmission télédynamique répondant à un but donné.

VII. — Définition de ce qu'on appellera « les cables-limites ».

Toutes choses égales d'ailleurs, un câble peut transmettre une force d'autant plus grande que le rapport des flèches k est plus grand et que la flèche relative m est plus petite.

On a, en effet, par les équations [(13)] et [(14)],

$$N = \frac{pVl}{300m}\sqrt{\frac{1+k^2}{2}}\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Il résulte de cette formule que, pour une même valeur de la portée, de la vitesse et du poids du câble par mètre courant, le maximum de travail transmis a lieu pour le maximum de k et le minimum de m.

Or le minimum de m est $\frac{1}{40}$, ainsi que nous l'avons dit précédemment ([1]).

([1]) En prenant $\frac{1}{40}$ comme minimum de m dans tous les cas, nous laissons de côté la considération relative à la facilité de réfection des épissures. Mais, comme cette considération n'intervient que

Un câble établi avec cette flèche relative de $\frac{1}{40}$ ne la conservera pas, par suite de l'allongement permanent qu'il subit, et, si l'on veut que cet allongement n'entraîne pas des variations trop considérables dans le fonctionnement, il faut qu'au moment où le glissement va se produire la flèche relative m' soit égale à $m\sqrt{2}$.

Mais, d'autre part, la valeur k' de k, pour laquelle le glissement est sur le point d'avoir lieu (lorsque le coefficient de frottement est de 0,25, ce qu'on peut admettre, etl orsque la flèche relative est de $\frac{1}{40}$), est inférieure à 2,2 et peut être prise égale à 2,17 (Tableau n° 5 de la deuxième Partie).

Pour que la condition relative au fonctionnement soit satisfaite, il faut donc qu'au moment où $m' = m\sqrt{2}$ la valeur de k soit devenue au plus égale à 2,17, et comme on a toujours sensiblement (§ XIII de la deuxième Partie)

$$\frac{m'}{m} = \frac{k'-1}{k-1},$$

il en résulte pour le maximum de k

$$k = 1 + \frac{2,17 - 1}{\sqrt{2}} = 1,83.$$

Les câbles établis avec une flèche relative de $\frac{1}{40}$ et une valeur de k égale à 1,83 donneront le travail maximum. En effet, si l'on voulait augmenter ce travail en diminuant m, on serait exposé à des efforts dangereux sous l'action des variations atmosphériques; et si l'on voulait augmenter ce travail en augmentant k, le glissement se produirait trop tôt, par suite de l'allongement permanent.

Nous désignerons, en conséquence, les câbles ainsi établis sous le nom de *câbles-limites*, et ils seront définis par les relations suivantes :

$$m = \frac{1}{40}, \quad m' = \frac{\sqrt{2}}{40}, \quad k = 1,83, \quad k' = 2,17,$$

---

dans le cas des petites distances, et comme, d'un autre côté, on ne transmet habituellement à ces petites distances que de petites forces pour lesquelles on peut employer le système d'agrafes à vis, il nous est permis d'admettre $\frac{1}{40}$ comme minimum de m pour une règle générale.

avec la condition

$$\theta_1 + \sigma = 15^{kg}.$$

Il est clair que les câbles-limites ne sont pas des câbles équivalents quand la portée varie. En effet, la condition d'équivalence, qui est (§ XV de la deuxième Partie)

$$m^2 l \frac{k^2(k-1)}{(1+k^2)(1+k^3)} = \text{const.},$$

ne peut être satisfaite lorsqu'on maintient à m et à k des valeurs fixes pour des portées différentes. Le coefficient de fonctionnement

$$\mathfrak{F} = \frac{3}{64} \frac{1}{m^2 l} \frac{(1+k^2)(1+k^3)}{k^2(k-1)}$$

varie en raison inverse de la portée.

Nous allons donner le Tableau numérique des éléments de ces câbles.

VIII. — Calcul des cables-limites. — Tableaux numériques de leurs éléments.

Reprenons les formules du § I de la deuxième Partie, en y considérant comme connus la vitesse V, la portée $2l$, le nombre des fils i et leur diamètre δ. Prenons k égal à 1,83 et m égal à $\frac{1}{40}$. Enfin, tenons compte de la relation

$$\theta_1 + \sigma = 15^{kg}.$$

Ces formules deviennent [1]

(1') $\quad f_0 = \frac{1}{40} 2l,$

(2') $\quad f_2 = 1,83 f_1,$

(3') $\quad \Theta = \Theta_1 - \Theta_2,$

(4') $\quad \chi = \theta_1 + \sigma = 15,$

(6') $\quad f_1 = \frac{1}{40} 2l \sqrt{\frac{2}{1+\overline{1,83}^2}} = \frac{1}{59} 2l,$

---

[1] Les numéros accentués donnés aux formules relatives aux câbles-limites sont les mêmes que ceux des formules correspondantes du § I de la deuxième Partie.

(7′) $$f_2 = \frac{1}{40} 1{,}832l\sqrt{\frac{2}{1+\overline{1{,}83}^2}} = \frac{1}{32} 2l,$$

(10′) $$\Theta_1 = \frac{p}{g}V^2 + \frac{59}{8}p \times 2l,$$

(11′) $$\Theta_2 = \frac{p}{g}V^2 + 4{,}03p \times 2l,$$

(12′) $$\Theta = 3{,}34p \times 2l,$$

(13′) $$\Theta = \frac{75N}{V},$$

(14′) $$p = 22{,}42\frac{N}{V \times 2l},$$

(15′) $$\Omega = 114p = 2556\frac{N}{V \times 2l},$$

(17′) $$\theta_1 = \frac{V^2}{114g} + \frac{59}{912}2l,$$

(18′) $$\theta_2 = \frac{V^2}{114g} + \frac{59}{1669}2l,$$

(19′) $$\sigma = \frac{20000\delta}{D},$$

(21′) $$i = 145\frac{p}{\delta^2},$$

(23′) $$\mathfrak{A} = 557p,$$

(25′) $$\mathfrak{f} = 166 \times \frac{1}{2l}$$ (1),

(27′) $$\lambda - l = \frac{4}{3}m^2 \times 2l = \frac{1}{1200}2l.$$

De cette dernière formule, on déduit

$$\lambda' - l = \frac{4}{3}m'^2 \times 2l = \frac{1}{1200}2l,$$

et l'on a ainsi, pour le raccourcissement à opérer quand le glissement va se produire,

$$4(\lambda' - \lambda) = \frac{1}{300} \times 2l.$$

Nous remarquerons ici que la quantité $\frac{V^2}{114g}$ qui entre dans θ_1 peut être

(1) On voit, par cette formule, que les câbles-limites présentent tous les types de fonctionnement quand la portée varie.

négligée ; ce terme représente, en effet, l'action de la force centrifuge dont il a été tenu compte en exprimant que la somme des deux tensions θ_1 et σ ne devait pas dépasser 15^{kg} par millimètre carré.

La formule (17') peut, dès lors, s'écrire

$$\theta_1 = \frac{59}{912} 2l = \frac{1}{15,5} 2l.$$

Les équations (1'), (6'), (7') fournissent respectivement les quantités f_0, f_1 et f_2 ; on tire ensuite de l'équation (4')

$$\sigma = 15 - \theta_1 = 15 - \frac{2l}{15,5};$$

on a de même, par l'équation (19'),

$$D = \frac{20000\,\delta}{\sigma} = \frac{20000\,\delta}{15 - \frac{2l}{15,5}};$$

par l'équation (21'),

$$p = \frac{i\delta^2}{145},$$

et par l'équation (14')

$$N = \frac{V}{22,42} p \times 2l = \frac{iV}{900} \frac{\delta^2 \times 2l}{3,61} \text{ (1)},$$

ce qui constitue toutes les quantités utiles à considérer.

Nous pouvons, dès lors, réunir dans le Tableau suivant les expressions qui permettront, pour tous les câbles-limites, de calculer les éléments nécessaires à la discussion d'un projet de transmission.

---

(1) Nous représenterons par $\mathfrak{N}$ la quantité $\frac{\delta^2 \times 2l}{3,61}$ et nous poserons

$$N = \frac{iV}{900} \mathfrak{N}.$$

Il y a intérêt, en effet, au point de vue de la rapidité du calcul, à séparer cette quantité $\mathfrak{N}$, qui reste la même pour tous les câbles-limites, puisqu'elle ne dépend pas de i et de V, et qui est égale à N, c'est-à-dire qui représente le travail transmis dans le cas d'un câble de trente-six fils marchant à la vitesse de 25^m.

TABLEAU N° 26.

Câbles-limites.

$$m = \frac{1}{40}.$$

$$m' = m\sqrt{2} = \frac{1}{28,3}.$$

$$k = 1,83.$$

$$k' = 2,17.$$

$$f_0 = \frac{1}{40} 2l.$$

$$f_1 = \frac{1}{59} 2l.$$

$$f'_1 = \frac{1}{48} 2l.$$

$$f_2 = \frac{1}{32} 2l.$$

$$f'_2 = \frac{1}{22} 2l.$$

$$\theta_1 = \frac{2l}{15,5}.$$

$$\sigma = 15 - \theta.$$

$$D = \frac{20000\delta}{15 - \theta_1}.$$

$$p = i\frac{\delta^2}{145}.$$

$$N = \frac{iV}{900}\frac{\delta^2 \times 2l}{3,61}.$$

$$4(\lambda' - \lambda) = \frac{2l}{300}.$$

Il faut remarquer ici que les seuls éléments qui varient avec le nombre des fils, leur diamètre ou avec la vitesse, sont le poids du câble par mètre courant, le nombre de chevaux transmis et le diamètre des poulies. Tous les autres éléments ne dépendent que de la portée et sont, par suite, les mêmes pour tous les câbles-limites. On voit de plus que le fonctionnement de ces câbles est le même, pour une même portée, et que la régularité qui est indépendante de la vitesse et de la portée est proportionnelle au nombre des fils et au carré de leur diamètre.

Le Tableau n° 27 donne tous les éléments utiles à considérer, lorsqu'on veut installer un câble-limite.

TABLEAU N° 27 [1].

Câbles-limites (portées moyennes).

$m = \frac{1}{40}$, $m' = \frac{1}{28,3}$, $k = 1,83$, $k' = 2,17$, $\theta_1 + \sigma = 15^{kg}$, $p = i\mathfrak{P}$, $N = \frac{iV}{900}\mathcal{N}$.

δ.	$\mathfrak{P}$.	2l : 20m.		40m.		60m.		80m.		100m.		120m.		140m.		160m.	
		$\mathcal{N}$.	D.	$\mathcal{N}$.	N.	$\mathcal{N}$.	D.	$\mathcal{N}$.	D.	$\mathcal{N}$.	D.	$\mathcal{N}$.	D.	$\mathcal{N}$.	D.	$\mathcal{N}$.	D.
	kg	ch	m	ch	m	ch	m	ch	m	ch	m	ch	m	ch	m	ch	m
0,5	0,0017	1,40	0,73	2,80	0,80	4,15	0,90	5,55	1,00	6,9	1,15	8,3	1,40	9,7	1,70	11,1	2,15
0,6	0,0025	2,00	0,88	4,10	0,96	6,05	1,10	8,05	1,20	10,0	1,40	12,0	1,65	14,0	2,00	16,0	2,55
0,7	0,0034	2,75	1,00	5,45	1,15	8,20	1,25	11,00	1,40	13,5	1,65	16,5	1,95	19,0	2,35	22,0	3,00
0,8	0,0044	3,60	1,15	7,15	1,30	10,50	1,45	14,50	1,65	18,0	1,85	21,5	2,20	25,0	2,70	28,5	3,40
0,9	0,0056	4,55	1,30	9,10	1,45	13,50	1,65	18,00	1,85	22,5	2,10	27,5	2,50	32,0	3,00	36,5	3,85
1,0	0,0069	5,60	1,45	11,00	1,60	17,00	1,80	22,50	2,05	28,0	2,35	33,5	2,75	39,0	3,35	44,5	4,25
1,2	0,0100	8,10	1,75	16,00	1,95	24,00	2,15	32,50	2,45	40,0	2,80	48,5	3,30	56,5	4,05	64,5	5,10
1,4	0,0136	11,00	2,05	22,00	2,25	33,00	2,50	44,00	2,85	55,0	3,25	66,0	3,85	77,0	4,70	88,0	5,95
1,6	0,0176	14,50	2,35	28,50	2,60	43,00	2,90	57,00	3,25	71,5	3,75	86,0	2,40	100,0	5,40	115,0	6,80
1,8	0,0224	18,00	2,60	36,00	2,90	54,50	3,25	72,50	3,65	91,0	4,20	110,0	4,95	127,0	6,05	145,0	7,65
2,0	0,0276	22,50	2,90	44,50	3,20	67,00	3,60	90,00	4,05	110,0	4,70	135,0	5,50	155,0	6,70	180,0	8,50
2,2	0,0375	27,00	3,20	54,00	3,55	81,00	3,95	110,00	4,45	135,0	5,15	160,0	6,05	190,0	7,40	215,0	9,35
2,4	0,0400	32,50	3,50	64,00	3,80	97,00	4,30	130,00	4,90	160,0	5,60	195,0	6,60	225,0	8,05	255,0	10,00
2,6	0,0466	38,00	3,80	75,00	4,20	115,00	4,70	150,00	5,30	190,0	6,10	225,0	7,25	265,0	8,75	305,0	11,00
2,8	0,0541	44,00	4,10	87,00	4,50	130,00	5,05	175,00	5,70	220,0	6,55	260,0	7,70	305,0	9,40	350,0	12,00
3,0	0,0621	50,50	4,40	100,00	4,80	150,00	5,40	200,00	6,10	250,0	7,00	300,0	8,30	355,0	10,10	400,0	13,00

Éléments communs à tous les câbles-limites quels que soient i, V, δ.

	20m.	40m.	60m.	80m.	100m.	120m.	140m.	160m.
	m	m	m	m	m	m	m	m
f_0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
	0,70	1,40	2,10	2,70	3,50	4,25	4,95	5,65
f_1	0,35	0,70	1,00	1,35	1,70	2,05	2,40	2,70
	0,40	0,80	1,25	1,65	2,05	2,45	2,90	3,30
f_2	0,60	1,25	1,85	2,50	3,10	3,70	4,35	4,95
	0,90	1,85	2,75	3,70	4,60	5,50	6,40	7,35
$4(\lambda' - \lambda)$	0,07	0,13	0,20	0,27	0,33	0,40	0,47	0,53
	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg
θ_1	1,30	2,60	3,90	5,15	6,45	7,75	9,05	10,30
σ	13,70	12,40	11,10	9,85	8,55	7,25	5,95	4,70
$\frac{D}{\delta}$	1460	1610	1790	2030	2340	2760	3360	4260

[1] Les deux nombres inscrits en face de f_0, de f_1 et de f_2 indiquent les valeurs de chacune de

Le Tableau qui précède montre que les câbles-limites, définis comme nous l'avons dit, conduisent pour les grandes portées à des poulies de diamètre exagéré et pour les petites portées à des raccourcissements trop faibles. On sait, en effet, que le diamètre des poulies ne peut guère, en pratique, dépasser 6^m et que les épissures nécessitent un raccourcissement à opérer de $0^m,20$ en moyenne.

Nous examinerons tout d'abord comment l'on peut éviter l'exagération de diamètre des poulies.

La valeur de ce diamètre est [(19)]

$$D = \frac{20000\,\delta}{\sigma},$$

ou, si l'on veut,

$$D = \frac{20000\,\delta}{15 - \theta_1},$$

puisque l'on s'assujettit à la condition

$$\theta_1 + \sigma = 15.$$

Dans le Tableau n° **27**, θ_1 croissait avec la portée depuis $1^{kg},30$ jusqu'à $10^{kg},30$, et c'est cet accroissement de θ_1 qui, en produisant un accroissement correspondant de D, conduisait à des diamètres exagérés. Il est dès lors naturel, pour éviter cet inconvénient, de donner à θ_1 une valeur fixe pour les grandes distances, en ne s'assujettissant plus à prendre $\frac{1}{40}$ comme valeur de la flèche relative au repos.

Les quantités que l'on se donne *a priori* sont alors k, θ_1, V, i, δ, σ et $2l$,

---

ces quantités au moment de l'installation et au moment où le glissement est à craindre par suite de l'allongement permanent.

La quantité $4(\lambda - \lambda')$ donne le raccourcissement à opérer sur la longueur du câble lorsqu'il est nécessaire de le retendre.

$\mathfrak{M}$, multiplié par $\frac{iV}{900}$ (i, nombre des fils; V, vitesse), fournit le travail transmis, en chevaux.

$\mathfrak{P}$, multiplié par le nombre des fils, donne le poids du câble par mètre courant, exprimé en kilogrammes.

Ce Tableau suppose d'ailleurs essentiellement que l'on a pris 15^{kg} pour limite de la somme des tensions par millimètre carré, et que la densité du câble, rapportée à la section en fer, est de $\frac{1}{114}$.

et l'on trouve aisément, au moyen des formules du § I de la deuxième Partie, en remplaçant k par sa valeur 1,83 et admettant toujours $\theta_1 + \sigma = 15^{kg}$,

[(17)] $$m = \frac{2l}{618\theta_1} \quad (^1);$$

on en déduit

[(1)] $$f_0 = \frac{4l^2}{618\theta_1},$$

[(6)] $$f_1 = \frac{4l^2}{912\theta_1},$$

[(7)] $$f_2 = \frac{4l^2}{498\theta_1},$$

[(21)] $$p = \frac{i\delta^2}{145},$$

[(14)] $$N = \frac{iV}{900} 4,28\delta^2\theta_1,$$

[(19)] $$D = \frac{20000\delta}{15 - \theta_1},$$

[(27)] $$\lambda - l = \frac{(2l)^3}{286450\theta_1^2}.$$

Si l'on pose maintenant la condition

$$m' = m\sqrt{2},$$

d'où résulte

$$k' = 2,17,$$

on en déduit

$$m' = \frac{2l}{437\theta_1},$$

$$f'_0 = \frac{4l^2}{437\theta_1},$$

$$f'_1 = \frac{4l^2}{745\theta_1},$$

$$f'_2 = \frac{4l^2}{407\theta_1};$$

---

(1) En négligeant daus la valeur de θ_1 le terme $\frac{V^2}{114g}$, ce qui est permis, ainsi que nous l'avons dit, lorsque l'on pose $\theta_1 + \sigma = 15^{kg}$.

on trouve alors

$$\lambda' - l = \frac{8}{3} m'^2 l = \frac{2(2l)^3}{286450\theta_1^2},$$

d'où l'on conclut

$$4(\lambda' - \lambda) = \frac{4(2l)^3}{286450\theta_1^2} = \frac{(2l)^3}{71600\theta_1^2}.$$

Il est facile de comprendre l'usage que l'on peut faire des formules qui précèdent, afin d'éviter l'exagération de diamètre des poulies, lorsque la portée va en croissant. Si l'on veut, par exemple, que le diamètre ne dépasse pas une valeur D_m (1), on remplace, dans l'expression de D, δ par sa valeur maxima égale à 3^{mm}, et l'on pose

$$D_m = \frac{20000 \times 3}{15 - \theta_1},$$

ce qui donne

$$\theta_1 = 15 - \frac{60000}{D_m},$$

valeur que l'on prendra, dans les formules précédentes, comme valeur fixe de θ_1.

En cherchant d'ailleurs dans le Tableau n° **27**, parmi les valeurs régulièrement croissantes de θ_1, celle qui atteint $15 - \frac{60000}{D_m}$, on trouvera, par la colonne à laquelle elle appartient, la portée à partir de laquelle les nouvelles formules sont applicables.

Les Tableaux n^{os} **28** et **29** ont été établis dans cet ordre d'idées; pour le premier, on a donné à θ_1 la valeur 10,30, ce qui, en pratique, peut être considéré comme un maximum rarement dépassé et rend ce Tableau applicable à partir de la distance de 160^m; pour le second, on a donné à θ_1 la valeur 7,75, ce qu'on peut regarder comme une valeur moyenne et permet d'appliquer ce Tableau pour les portées de 120^m et audessus.

---

(1) Exprimée en millimètres.

Il faut remarquer que, dans ces câbles, l'on a toujours

$$\frac{N}{p} = 178\,V\theta_1,$$

c'est-à-dire que le travail transmis est proportionnel à la valeur choisie pour θ_1, mais qu'une fois cette valeur fixée, ce travail, indépendant de la portée, est proportionnel uniquement au poids du câble par mètre courant et à la vitesse.

TABLEAU N° 28.

Cables-limites : $\theta_1 = 10^{kg},3$. — (Portées supérieures à 160^m).

$k = 1,83$, $k' = 2,17$, $m' = m\sqrt{2}$, $\theta_1 + \sigma = 15^{kg}$, $\theta_1 = 10^{kg},3$, $p = i\mathcal{P}$, $N = \frac{iV}{900}\mathcal{N}$.

Éléments indépendants de la portée.

δ.	$\mathcal{P}$.	$\mathcal{N}$.	D.	σ.	$\frac{D}{\delta}$.
mm	kg	ch	m		
0,5	0,0017	11,10	2,15		
0,6	0,0025	16,00	2,55		
0,7	0,0034	22,00	3,00		
0,8	0,0044	28,50	3,40		
0,9	0,0056	36,50	3,85		
1,0	0,0069	44,50	4,25		
1,2	0,0100	64,50	5,10		
1,4	0,0136	88,00	5,95	4,70 kg	4255
1,6	0,0176	115,00	6,80		
1,8	0,0224	145,00	7,65		
2,0	0,0276	180,00	8,50		
2,2	0,0375	215,00	9,35		
2,4	0,0400	255,00	10,00		
2,6	0,0466	305,00	11,00		
2,8	0,0541	350,00	12,00		
3,0	0,0621	400,00	13,00		

Éléments communs à tous les câbles, quels que soient i, V et δ.

	$2l$								
	160^m.	180^m.	200^m.	220^m.	240^m.	260^m.	280^m.	300^m.	320^m.
	m	m	m	m	m	m	m	m	m
f_0 .... (1)	4,00	5,10	6,30	7,55	9,00	10,55	12,20	14,05	16,00
f_0 .... (2)	5,65	7,20	8,85	10,70	12,80	15,00	17,40	20,00	22,70
f_1 .... (1)	2,70	3,45	4,20	5,10	6,10	6,75	8,30	9,50	10,80
f_1 .... (2)	3,30	4,15	5,15	6,25	7,40	8,70	10,10	11,50	13,10
f_2 .... (1)	4,95	6,25	7,55	9,35	11,10	13,10	15.20	17,40	22,70
f_2 .... (2)	7,15	9,30	11,50	13,90	16,60	19,40	22,50	25,90	29,40
$4(\lambda' - \lambda)$	0,53	0,75	1,05	1,38	1,79	2,27	2,84	3,50	4,24

TABLEAU N° 29.

Câbles-limites : $\theta_1 = 7^{kg},75$. — (Portées supérieures à 120^m).

$k = 1,83$, $k' = 2,17$, $m' = m\sqrt{2}$, $\theta_1 + \sigma = 15^{kg}$, $\theta_1 = 7^{kg},75$, $p = i\mathfrak{P}$, $N = \frac{iV}{900}\mathfrak{N}$.

Éléments indépendants de la portée.

δ.	$\mathfrak{P}$.	$\mathfrak{N}$.	D.	σ.	$\frac{D}{\delta}$.
mm 0,5	kg 0,0017	ch 8,3	m 1,40		
0,6	0,0025	12,0	1,65		
0,7	0,0034	16,5	1,95		
0,8	0,0044	21,5	2,20		
0,9	0,0056	27,5	2,35		
1,0	0,0069	33,5	2,75		
1,2	0,0100	48,5	3,30		
1,4	0,0136	66,0	3,85	kg 7,25	2760
1,6	0,0176	86,0	4,40		
1,8	0,0224	110,0	4,95		
2,0	0,0276	135,0	5,50		
2,2	0,0375	160,0	6,05		
2,4	0,0400	195,0	6,60		
2,6	0,0466	225,0	7,25		
2,8	0,0541	260,0	7,70		
3,0	0,0621	300,0	8,30		

Éléments communs à tous les câbles, quels que soient i, V et δ.

	2l								
	120m.	140m.	160m.	180m.	200m.	220m.	240m.	260m.	280m.
f_0	m 3,00	m 4,10	m 5,35	m 6,75	m 8,35	m 10,10	m 12,00	m 14,10	m 16,40
	4,25	5,75	7,50	9,50	11,70	14,20	16,90	19,80	23,00
f_1	2,05	2,75	3,60	4,60	5,65	6,85	8,15	9,60	11,10
	2,46	3,35	4,35	5,55	6,85	8,25	9,80	11,50	13,40
f_2	3,70	5,05	7,50	9,50	11,70	14,20	16,90	19.80	23,00
	5,50	7,50	9,80	12,30	15,30	18,50	22,00	25.80	30,00
$4(\lambda' - \lambda)$	0,40	0,64	0,95	1,35	1,85	2,47	3,20	4,07	5,10

Nous avons dit précédemment, après avoir établi le Tableau n° 27, que les câbles-limites conduisaient, pour les petites portées, à effectuer des raccourcissements trop faibles. Il nous reste à indiquer comment l'on pourra remédier à cet inconvénient, sous la réserve d'ailleurs que l'on n'appliquera les considérations qui suivent que dans le cas où les deux bouts du câble sont réunis par une épissure.

Le raccourcissement minimum que l'on puisse admettre est, comme nous l'avons vu, de $0^m,20$ en moyenne. Nous nous assujettirons dès lors à ce que ce raccourcissement reste constant quand la portée varie et, parmi les conditions qui définissent les câbles-limites, nous remplacerons celle de la flèche relative égale à $\frac{1}{40}$ par la suivante :

$$4(\lambda' - \lambda) = 0,20.$$

Les nouveaux câbles que nous obtiendrons ainsi seront donc donnés par

$$m' = m\sqrt{2},$$
$$k = 1,83,$$
$$k' = 2,17,$$
$$\theta_1 + \sigma = 15^{kg},$$
$$4(\lambda' - \lambda) = 0,20;$$

et l'on considérera les quantités i, δ, $2l$ et V comme connues.

On trouve alors

[(27)] $$4(\lambda' - \lambda) = \frac{16}{3} m^2 \times 2l = 0,2,$$

d'où l'on déduit

$$m = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{80 \times 2l}} = \frac{1}{5,164\sqrt{2l}};$$

on a de même

[(1)] $$f_0 = \frac{\sqrt{2l}}{5,164},$$

[(6)] $$f_1 = \frac{\sqrt{2l}}{7,62},$$

[(7)] $$f_2 = \frac{\sqrt{2l}}{4,16},$$

[(17)] $$\theta_1 = \frac{(2l)^{\frac{3}{2}}}{120},$$

[(4)] $$\sigma = 15 - \theta_1,$$

[(19)] $$D = \frac{200000\delta}{15 - \theta_1},$$

[(p)] $$p = \frac{i\delta^2}{145},$$

[(14)] $$N = \frac{iV}{900} \frac{\delta^2 (2l)^{\frac{3}{2}}}{28}.$$

Mais, par la condition

$$m' = m\sqrt{2},$$

on conclut

$$m' = \frac{1}{3,65\sqrt{2l}},$$

$$f'_0 = \frac{\sqrt{2l}}{3,65},$$

$$f'_1 = \frac{\sqrt{2l}}{6,24},$$

$$f'_2 = \frac{\sqrt{2l}}{2,84}.$$

Le Tableau n° **30** donne, pour les diverses portées inférieures à 60^m, les éléments des câbles calculés d'après les formules qui précèdent. Lors donc qu'il s'agira d'une portée plus petite que 60^m, on emploiera ce Tableau si les deux bouts du câble doivent être réunis par des épissures. On emploiera, au contraire, le Tableau n° **27** si, la force à transmettre étant petite, le système d'agrafes à vis peut être adopté.

TABLEAU N° 30.

[Câbles limites : $4(\lambda' - \lambda) = 0^{m},20$]. — Portées inférieures à 60^{m}.

$k = 1,83$, $k' = 2,2$, $m' = m\sqrt{2}$, $\theta_1 + \sigma = 15^{kg}$, $4(\lambda' = \lambda) = 0,20$, $p = i\mathfrak{P}$, $N = \frac{iV}{900}\mathfrak{N}$.

δ.	𝔓.	2l — 20m. 𝔑.	2l — 20m. D.	2l — 40m. 𝔑.	2l — 40m. D.	2l — 60m. 𝔑.	2l — 60m. D.
mm	kg	ch	m	ch	m	ch	m
0,5	0,0017	1,20	0,70	2,30	0,78	4,15	0,90
0,6	0,0025	1,75	0,84	3,30	0,93	6,05	1,10
0,7	0,0034	2,35	0,98	4,45	1,10	8,20	1,25
0,8	0,0044	3,05	1,10	5,85	1,25	10,50	1,45
0,9	0,0056	3,90	1,25	7,40	1,40	13,50	1,65
1,0	0,0069	4,80	1,40	9,15	1,55	17,00	1,80
1,2	0,0100	6,90	1,70	13,10	1,85	24,00	2,15
1,4	0,0136	9,45	1,95	18,00	2,15	33,00	2,50
1,6	0,0176	12,50	2,25	23,50	2,50	43,00	2,90
1,8	0,0224	15,50	2,50	29,50	2,80	54,50	3,25
2,0	0,0276	19,00	2,80	36,50	3,10	67,00	3,60
2,2	0,0375	24,50	3,10	44,50	3,40	81,00	3,95
2,4	0,0400	27,50	3,35	52,50	3,70	97,00	4,30
2,6	0,0466	32,50	3,65	62,00	4,05	115,00	4,70
2,8	0,0541	37,50	3,90	72,00	4,35	130,00	5,05
3,0	0,0621	43,00	4,20	82,00	4,65	150,00	5,40
f_0		0,85		1,20		1,50	
		1,20		1,70		2,10	
f_1		0,60		0,85		1,00	
		0,70		1,00		1,25	
f_2		1,05		1,50		1,85	
		1,60		2,25		2,75	
		kg		kg		kg	
θ_1		0,74		2,10		3,87	
σ		14,26		12,90		11,13	
$\frac{D}{\delta}$		1400		1550		1790	

IX. — Cables équivalents. — Tableaux numériques de leurs éléments. — Régularité ordinaire.

Les câbles que nous venons d'étudier, et que nous avons désignés sous le nom de *câbles-limites,* pourront être employés chaque fois que, le travail effectué n'exigeant par sa nature aucune condition spéciale de régularité, on pourra se laisser guider par la seule considération d'économie. Nous avons vu, en effet, que ces câbles étaient ceux qui, à poids égal, transmettaient le plus grand travail possible et nous avons reconnu qu'ils n'étaient pas équivalents quand la portée variait.

Mais, dans la plupart des cas, la valeur du coefficient de fonctionnement ne peut être ainsi laissée de côté, et la nature du moteur, aussi bien que le genre de travail à effectuer nécessitent que ce coefficient varie entre certaines limites. Il faudrait donc, dans chaque cas particulier, fixer *a priori* ces limites, qui permettraient alors, parmi tous les câbles répondant à la question posée, de choisir celui qui conviendrait comme régularité, et suppprimeraient ainsi l'indétermination qui existe dans la solution des problèmes relatifs aux transmissions télédynamiques.

Cette manière d'opérer exigerait une discussion toujours délicate et nécessiterait des calculs pénibles; on peut les éviter, dans les circonstances de la pratique, de la manière suivante :

L'étude que nous avons faite des câbles équivalents permet, pour une portée quelconque, d'obtenir une transmission fonctionnant comme une transmission donnée. On pourra, dès lors, profiter des résultats acquis par l'expérience et, après avoir fait choix d'une transmission établie, dont le fonctionnement a été reconnu satisfaisant ([1]), installer une transmission équivalente.

On conçoit d'après cela qu'il est impossible de fournir des tableaux numériques de câbles correspondant à tous les cas qui peuvent se présenter,

---

([1]) Cette transmission doit être placée dans des conditions analogues à celles de la transmission qu'on veut installer, c'est-à-dire être employée pour un travail de même nature.

puisqu'il faudrait un tableau pour chaque degré de fonctionnement, ou, si l'on veut, un tableau de câbles équivalents pour chaque câble-limite.

La seule chose possible à faire serait de calculer d'avance trois séries de câbles équivalents correspondant à ce qu'on pourrait considérer comme une régularité grande, moyenne ou petite. Cela simplifierait, en effet, dans la plupart des cas, les calculs à faire, puisqu'il suffirait, en général, de déterminer la série dans laquelle il conviendrait de choisir le câble à adopter. Mais cette détermination même exigerait une discussion encore délicate, qu'il est bon d'éviter si l'on veut arriver à une règle embrassant les cas ordinaires de la pratique. On est ainsi conduit, faute d'une définition assez précise de ce qu'on peut appeler régularité grande ou régularité faible, à se borner à ce qu'on désignera sous le nom de *régularité moyenne* et que nous allons définir.

C'est un fait d'expérience que, dans les cas ordinaires de la pratique, les câbles-limites [1] correspondant à des portées comprises entre 100^m et 150^m fonctionnent convenablement. On prendra dès lors comme type de régularité moyenne le câble-limite de 120^m et l'on obtiendra, par les câbles équivalents, des câbles convenables pour les circonstances habituelles qui se présentent.

La marche que nous allons suivre pour établir le tableau numérique des éléments de ces câbles s'appliquerait d'ailleurs évidemment pour le cas d'un coefficient de fonctionnement quelconque. Il suffirait de remplacer dans les formules qui vont être établies les éléments du câble-limite de 120^m

---

[1] On peut se demander pourquoi ce sont les câbles-limites qui interviennent ici; la raison de ce fait est la suivante :

Les formules que donnent les aide-mémoires conduisent presque toujours à des câbles-limites. En effet, ces aides-mémoires indiquent que l'on doit prendre k égal à 2, et, d'autre part, on est toujours tenté de donner à m une valeur aussi petite que possible, afin d'obtenir des câbles plus légers.

C'est pour ce motif qu'il est admis généralement que les câbles courts fonctionnent mal; pour parler exactement, il faudrait dire : les câbles-limites courts.

Quoi qu'il en soit, un câble-limite étant parfaitement défini dans son fonctionnement dès qu'on connaît sa longueur, il est naturel de définir une série de câbles équivalents par le câble-limite ayant même coefficient de fonctionnement ou plutôt par la longueur de ce câble-limite.

par ceux du câble-limite dont le coefficient de fonctionnement $\frac{166}{2l}$ serait égal au coefficient de fonctionnement $\mathfrak{f}$ que l'on veut réaliser, éléments que fournirait le Tableau n° 27.

Ceci posé, nous avons démontré, au § XV de la deuxième Partie, que l'on pouvait obtenir une transmission équivalente à une transmission donnée : 1° en laissant la flèche relative au repos m la même quand la portée augmentait et à la condition de poser

$$(\alpha) \qquad \frac{k^2(k-1)}{(1+k^2)(1+k^3)} \frac{(1+k_1^2)(1+k_1^3)}{k_1^2(k_1-1)} = \frac{2l_1}{2l}.$$

2° En laissant le rapport k des flèches le même quand la portée diminuait, pourvu que l'on s'assujettit à la relation

$$(\beta) \qquad \frac{m_1}{m} = \frac{\sqrt{2l}}{\sqrt{2l_1}}.$$

Nous supposerons dès lors, pour les portées supérieures à 120^{m}, m égal à $\frac{1}{40}$, valeur de la flèche relative au repos admise pour le câble-limite. Quant au rapport des flèches k_1, nous le déduirons de la relation (α), où l'on remplace k par 1,83, et $2l$ par 120,

$$\frac{(1+k_1^2)(1+k_1^3)}{k_1^2(k_1-1)} = \frac{1}{0,09 \times 120} 2l_1;$$

on trouve alors, en se servant du Tableau n° 19, qui donne les valeurs de k_1 correspondant aux diverses valeurs de $\frac{k_1^2(k_1-1)}{(1+k_1^2)(1+k_1^3)}$:

Pour $2l_1 = 140^{\text{m}}$ . . . . $k_1 = 1,48$
Pour $2l_1 = 160^{\text{m}}$ . . . . $k_1 = 1,38$
Pour $2l_1 = 180^{\text{m}}$ . . . . $k_1 = 1,31$
Pour $2l_1 = 200^{\text{m}}$ . . . . $k_1 = 1,27$

On a ainsi pour chaque portée les valeurs du rapport des flèches; on connaît m; si donc on se donne la vitesse V et le nombre des fils i, on pourra, pour chaque valeur de N et chaque valeur de δ, en tenant compte

de la relation $\theta_1 + \sigma = 15^{kg}$, déterminer tous les éléments des câbles équivalents au câble-limite de 120^m, lorsque la portée augmente.

Les quatre dernières colonnes du Tableau n° 31 ont été établies dans ces conditions, d'après les formules données au § VIII, pour les câbles-limites, mais en remplaçant la valeur 1,83 de k par les valeurs de k_1 que nous venons d'indiquer.

Pour les portées inférieures à 120^m, nous avons laissé à k la valeur 1,83; mais, d'après la relation (β), nous avons pris pour la flèche relative au repos

$$m_1 = \frac{1}{40}\frac{\sqrt{120}}{\sqrt{2l_1}} = \sqrt{\frac{3}{40 \times 2l_1}};$$

on trouve ainsi

Pour $2l = 20^m$....................	$m_1 = \frac{1}{16}$
Pour $2l = 40^m$....................	$m_1 = \frac{1}{23}$
Pour $2l = 60^m$....................	$m_1 = \frac{1}{28}$
Pour $2l = 80^m$....................	$m_1 = \frac{1}{32}$
Pour $2l = 100^m$....................	$m_1 = \frac{1}{36}$

Les cinq premières colonnes du Tableau n° 31 ont été calculées ainsi, en remplaçant dans les formules du § VIII la valeur de m égale à $\frac{1}{40}$ par les valeurs de m_1 écrites ci-dessus et en conservant à k sa valeur 1,83.

Il a été admis d'ailleurs, pour des raisons analogues à celles indiquées au sujet des câbles-limites, et d'après le résultat de l'expérience, que le rapport $\frac{m'}{m}$ des flèches relatives au repos, lors de l'installation et au moment où il convient de raccourcir le câble, restait égal à $\sqrt{2}$.

TABLEAU N° 31.

Câbles équivalents (régularité ordinaire).

Portées supérieures à 120^m... $m = \frac{1}{40}$, k variable
Portées inférieures à 120^m... m variable, $k = 1,83$
$\Big\}$ $\theta_1 + \sigma = 15^{kg}$, $\frac{m'}{m} = \sqrt{2}$, $p = i\mathfrak{P}$, $\mathrm{N} = \frac{i\mathrm{V}}{900}\mathcal{N}$.

δ.	$\mathfrak{P}$.	$2l$: 20^m.		40^m.		60^m.		80^m.		100^m.		120^m.		140^m.		160^m.		180^m.		200^m.	
		$\mathcal{N}$	D.	$\mathcal{N}$.	D.	$\mathcal{N}$.	D	$\mathcal{N}$.	D.	$\mathcal{N}$.	D.	$\mathcal{N}$.	D.	$\mathcal{N}$.	D.	$\mathcal{N}$.	D.	$\mathcal{N}$.	D.	$\mathcal{N}$.	D.
mm 0,5	kg 0,0017	ch 0,57	m 0,70	ch 1,60	m 0,75	ch 2,95	m 0,80	ch 4,55	m 0,95	ch 6,4	m 1,10	ch 8,3	m 1,40	ch 5,8	m 1,40	ch 5,4	m 1,75	ch 5,1	m 1,75	ch 4,9	m 2,00
0,6	0,0025	0,82	0,85	2,40	0,90	4,25	1,00	6,65	1,10	9,2	1,30	12,0	1,65	8,4	1,65	7,7	2,10	7,3	2,10	7,0	2,40
0,7	0,0034	1,10	0,95	3,15	1,05	5,80	1,15	8,90	1,30	12,5	1,55	16,5	1,95	11,5	1,95	10,5	2,45	9,9	2,45	9,5	2,80
0,8	0,0044	1,45	1,10	4,15	1,20	7,55	1,30	12,00	1,50	16,5	1,75	21,5	2,20	15,0	2,20	14,0	2,80	13,0	2,80	12,5	3,20
0,9	0,0056	1,80	1,25	5,20	1,35	9,60	1,45	15,00	1,70	20,5	2,00	27,5	2,50	19,0	2,50	17,5	3,15	16,5	3,10	16,0	3,60
1,0	0,0069	2,25	1,40	6,45	1,50	12,00	1,65	18,00	1,85	25,5	2,20	33,5	2,75	23,0	2,75	21,5	3,50	20,0	3,45	19,5	4,00
1,2	0,0100	3,25	1,65	9,30	1,80	17,00	1,95	26,50	2,25	36,5	2,65	45,5	3,30	33,5	3,30	31,0	4,15	29,0	4,15	28,0	4,80
1,4	0,0136	4,45	1,95	12,50	2,10	23,00	2,30	36,00	2,60	50,0	3,10	66,0	3,85	45,5	3,85	42,0	4,85	40,0	4,85	38,0	5,60
1,6	0,0176	5,80	2,20	16,50	2,40	30,50	2,60	46,50	3,00	65,5	3,50	86,0	4,40	60,0	4,40	55,0	5,55	52,0	5,55	50,0	6,40
1,8	0,0224	7,40	2,50	21,00	2,65	38,50	2,95	59,00	3,35	83,0	3,95	110,0	4,95	75,0	4,95	70,0	6,25	66,0	6,25	63,0	7,20
2,0	0,0276	9,10	2,75	26,00	2,95	47,50	3,25	73,00	3,70	100,0	4,40	135,0	5,50	93,0	5,50	86,0	6,95	81,0	7,00	78,0	8,00
2,2	0,0375	11,00	3,05	31,50	3,25	57,50	3,60	88,50	4,10	125,0	4,85	160,0	6,05	115,0	6,05	105,0	7,65	98,0	7,65	94,0	8,80
2,4	0,0400	13,00	3,30	37,50	3,55	68,00	3,90	105,00	4,45	145,0	5,30	195,0	6,60	135,0	6,60	125,0	8,30	115,0	8,35	110,0	9,60
2,6	0,0466	15,50	3,60	43,50	3,85	80,00	4,25	125,00	4,85	170,0	5,70	225,0	7,25	155,0	7,25	145,0	9,00	135,0	9,05	130,0	10,40
2,8	0,0541	18,00	3,85	50,50	4,15	93,00	4,55	145,00	5,20	200,0	6,20	260,0	7,70	180,0	7,70	170,0	9,70	160,0	9,70	155,0	11,20
3,0	0,0621	20,50	4,15	58,00	4,45	105,00	4,90	165,00	5,60	230,0	6,60	300,0	8,30	210,0	8,30	185,0	10,50	180,0	10,50	175,0	12,00

	20^m.	40^m.	60^m.	80^m.	100^m.	120^m.	140^m.	160^m.	180^m.	200^m.
f_0.........	1,22	1,64	2,12	2,45	2,74	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00
	1,72	2,31	2,99	1,45	1,86	4.23	4,94	5,65	6,35	7,05
							4.73	**5.35**	**6,00**	**6,55**
f_1.........	0,83	1,11	1,44	1,66	1,85	2,03	2,80	3,33	3,88	4,38
	1,00	1,35	1,73	2,01	2,24	2,46	2,55	4,35	5,07	5,84
							2,34	**4,05**	**4,72**	**5,34**
f_2.........	1,52	2,03	2,63	3,03	3,39	3,72	4,12	4,55	5,10	5,52
	2,25	3,00	3.88	4,49	5,01	5,50	6,00	6,75	7,40	8,10
							5,79	**6,45**	**7,05**	**7,60**
$4(\lambda' - \lambda)$..	m 0,40	m 0,40	m 0,40	m 0,40	m 0,40	m 0,40	m 0,47	0,53	m 0,60	m 0,67
							0,42	**0,47**	**0,50**	**0,56**
θ_1.........	kg 0,53	kg 1.49	g 2,74	kg 4,22	kg 5,90	kg 7,75	kg 7,75	kg 8,45	kg 9,25	kg 10,00
σ.........	14,47	13,51	12,26	10,78	9,10	7,25	7,25	6,55	5,75	5,00
$\frac{D}{\delta}$.........	1380	1480	1630	1860	2200	2760	2760	3060	3480	4000

On a indiqué dans le Tableau précédent deux valeurs pour les flèches maxima à admettre; celles qui sont en petits caractères correspondent au cas où $\frac{m'}{m}$ est égal à $\sqrt{2}$; celles qui sont en gros caractères supposent que l'on s'assujettit à maintenir le coefficient de fonctionnement compris entre les mêmes limites pour tous les câbles. Il est nécessaire que nous insistions sur ce point.

Par la manière même dont nous avons calculé les câbles dont il s'agit lorsque la portée est supérieure à 120^{m}, nous avons exprimé que ces câbles étaient équivalents au moment de l'installation. Mais, par suite de l'allongement permanent qu'ils éprouvent à l'emploi, k se rapproche de l'unité et $\frac{m'}{m}$ doit se rapprocher de $\sqrt[3]{2}$; il en résulte que ces câbles cessent d'être équivalents au moment où le glissement va se produire, si l'on s'impose, comme nous l'avons fait, la condition $m' = m\sqrt{2}$. En effet, la condition d'équivalence

$$\frac{3}{64}\,\frac{1}{m^2 l}\,\frac{(k^2+1)(k^3+1)}{k^2(k-1)} = \text{const.}$$

ne peut être satisfaite, à l'instant du glissement, m ayant une valeur constante, que si

$$(\gamma) \qquad \frac{1}{2l}\,\frac{(k'^2+1)(k'^3+1)}{k'^2(k'-1)} = \text{const.};$$

or l'on a toujours, comme nous l'avons vu,

$$(\delta) \qquad \frac{m'}{m} = \frac{k'-1}{k-1},$$

avec la relation

$$(\varepsilon) \qquad \frac{(k^2+1)(k^3+1)}{k^2(k-1)} = \frac{2l}{10{,}8},$$

et, ces deux dernières conditions étant satisfaites, la précédente ne le sera pas, en général.

Pour avoir des câbles complètement équivalents depuis le moment de l'installation jusqu'à celui où il devient nécessaire de les retendre, il faut donc, au lieu d'obtenir k' par les équations (δ) et (ε), le tirer de l'équation (γ).

C'est ainsi que nous avons opéré. Les chiffres en gros caractères correspondent au cas où k' a été déduit pour chaque câble de la relation

$$\frac{1}{2l}\frac{(1+k'^2)(1+k'^3)}{k'^2(k'-1)}=\frac{1}{120}\frac{(1+\overline{2,17}^2)(1+\overline{2,17}^3)}{\overline{2,17}^2(2,17-1)},$$

tandis que les chiffres en petits caractères ont été obtenus par

$$\frac{k'-1}{k-1}=\sqrt{2}$$

et

$$\frac{(1+k^2)(1+k^3)}{k^2(k-1)}=\frac{2l}{10,8}.$$

En réalité donc, les câbles établis en prenant pour limites supérieures des flèches les chiffres en gros caractères du Tableau n° 31 sont des câbles dont le coefficient de fonctionnement varie seulement du simple au double, et qui sont équivalents aussi bien au moment de l'installation qu'au moment où il devient nécessaire de les retendre. Au contraire, les câbles établis en prenant pour limites supérieures des flèches les chiffres en petits caractères sont des câbles équivalents au moment de l'installation, mais qui cessent de l'être ensuite, et leur coefficient de fonctionnement varie dans le rapport de 1 à un chiffre compris entre 2 et 2,8 (1).

La discussion que nous venons de faire au sujet des câbles correspondant à des portées supérieures à 120m ne se présentait pas pour les portées inférieures à cette limite. Il est clair en effet que, k étant alors constant pour toutes les portées, il en est de même pour k'. Dès lors, la condition

---

(1) En effet, les coefficients de fonctionnement au moment de l'installation et au moment où il faut retendre le câble sont, ainsi que nous l'avons vu, dans le rapport $\frac{m^2}{m'^2}$ (ou $\frac{1}{2}$, puisque $m'=m\sqrt{2}$) si k est voisin de 2, et dans le rapport $\frac{m^3}{m'^3}$ ou $(\sqrt[3]{2})^3$, ou encore 2,8, si k est voisin de l'unité. Les câbles dont nous parlons ayant été établis, en prenant pour k la valeur 2, on est sûr que la valeur k' de k est comprise entre 1 et 2 et l'on en conclut que le rapport des coefficients de fonctionnement a pour limites extrêmes $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2,8}$.

d'équivalence au moment du glissement est

$$\frac{1}{m'^2 \times 2l} = \text{const.},$$

qui est forcément satisfaite, puisqu'on a, par hypothèse,

$$m^2 = \frac{3}{40 \times 2l},$$

et

$$\frac{m'^2}{m^2} = 2.$$

On voit ainsi que, pour les portées plus petites que 120^m, tous les câbles fournis par le Tableau n° 31 sont complètement équivalents.

L'examen de ce Tableau montre que l'on est conduit, lorsque la portée augmente, à des diamètres de poulies trop grands pour être réalisables en pratique. Il est donc nécessaire d'opérer ici comme nous l'avons fait dans le cas des câbles-limites, et de se donner la valeur de θ_1, à la place de la condition $m = \frac{1}{40}$.

Les Tableaux n° 32 et n° 33 ont été établis dans cet ordre d'idées; le premier, en supposant pour θ_1 la valeur fixe de 10^{kg}, le second en prenant θ_1 égal constamment à $7^{kg},75$.

TABLEAU N° 32 (¹).

Câbles équivalents (régularité ordinaire) : $\theta_1 = 10^{kg}$.

$\theta_1 + \sigma = 15^{kg}$, $\theta_1 = 10^{kg}$, $m' = m\sqrt{2}$, $N = \frac{iV}{900}$ ℵ. Type : câble-limite de 120^m.

$\frac{D}{\delta}$.	σ.	δ.	D.	2l : 200ᵐ. ℵ.	220ᵐ. ℵ.	240ᵐ. ℵ.	260ᵐ. ℵ.	280ᵐ. ℵ.	300ᵐ. ℵ.	320ᵐ. ℵ.
		mm	m	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch
		0,5	2,00	4,9	3,85	3,1	2,5	2,1	1,7	1,4
		0,6	2,40	7,0	5,55	4,5	3,6	3,0	2,5	2,0
		0,7	2,80	9,5	7,5	6,0	4,8	4,0	3,3	2,7
		0,8	3,20	12,5	9,8	7,9	6,3	5,3	4,4	3,6
		0,9	3,60	16,0	12,5	10,0	8,0	6,7	5,5	4,5
		1,0	4,00	19,5	15,5	12,5	9,9	8,0	6,8	5,6
		1,2	4,80	28,0	22,0	18,0	14,0	12,0	9,8	7,5
4000	5^{kg}	1,4	5,60	38,0	30,0	24,0	19,0	16,0	13,5	11,0
		1,6	6,40	50,0	39,5	31,5	25,5	21,0	17,5	14,5
		1,8	7,20	63,0	50,0	40,0	32,0	27,0	22,0	18,0
		2,0	8,00	78,0	61,5	49,5	39,5	33,0	27,5	22,5
		2,2	8,80	94,0	74,5	60,0	48,0	40,0	33,0	27,0
		2,4	9,60	110,0	88,5	71,0	57,0	47,5	40,0	32,0
		2,6	10,40	130,0	105,0	84,0	67,0	56,0	46,5	38,0
		2,8	11,20	155,0	120,0	97,0	77,0	64,5	54,0	44,0
		3,0	12,00	175,0	140,0	110,0	89,0	74,0	62,0	50,0
				m	m	m	m	m	m	m
f_0				5,00	5,82	6,80	7,85	9,05	10,20	11,65
				7,05	8,22	9,60	11,10	12,80	14,40	16,50
				6,55	**7,55**	**8,75**	**10,20**	**11,50**	**13,00**	**14,90**
f_1				4,38	5,30	6,30	7,40	8,60	9,85	11,20
				5,84	7,10	8,55	10,20	12,00	13,60	15,90
				5,34	**6,43**	**7,70**	**9,30**	**10,70**	**12,20**	**14,30**
f_2				5,52	6,30	7,25	8,72	9,40	10,60	11,90
				8,10	9,15	10,40	12,00	13,60	15,80	17,20
				7,60	**8,48**	**9,55**	**11,10**	**12,30**	**14,40**	**15,60**
$4(\lambda' - \lambda)$				0,67	0,82	1,03	1,26	1,55	1,86	2,25
				0,56	**0,67**	**0,82**	**1,00**	**1,24**	**1,12**	**1,80**

(¹) Le poids du câble est inscrit dans les Tableaux précédents. On sait, en effet, qu'il est égal à $\frac{\delta^2}{4}$. On a jugé inutile, en conséquence, de le reproduire dans les Tableaux nᵒˢ 32 et 33.

TABLEAU N° 33.

Câbles équivalents (régularité ordinaire) : $\theta_1 = 7^{kg},75$.

$\theta_1 + \sigma = 15^{kg}$, $\theta_1 = 7^{kg},75$, $m' = m\sqrt{2}$, $N = \frac{iV}{900}N$. Type : câble limite de 120^m.

$\frac{D}{\delta}$.	σ.	δ.	D.	2l									
				120m.	140m.	160m.	180m.	200m.	220m.	240m.	260m.	280m.	300m.
				𝔑.	𝔑.	𝔑.	𝔑.	𝔑.	𝔑.	𝔑.	𝔑.	𝔑.	𝔑.
		mm	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch
		0,5	1,40	8,3	6,0	4,4	3,3	2,6	2,0	1,7	1,4	1,1	0,9
		0,6	1,65	12,0	8,6	6,4	4,8	3,7	2,9	2,4	1,9	1,6	1,3
		0,7	1,95	16,5	12,0	8,7	6,5	5,1	4,0	3,2	2,7	2,1	1,8
		0,8	2,20	21,5	15,5	11,5	8,5	6,6	5,2	4,2	3,5	2,8	2,4
		0,9	2,50	27,5	19,5	14,5	10,5	8,4	6,6	5,4	4,4	3,5	3,0
		1,0	2,75	33,5	24,0	17,5	13,0	10,5	8,1	6,6	5,4	4,4	3,7
	kg	1,2	3,30	48,5	34,5	25,5	19,0	15,0	11,5	9,5	7,8	6,3	5,3
2760	7,25	1,4	3,85	66,0	47,0	35,0	26,0	20,5	16,0	13,0	10,5	8,6	7,2
		1,6	4,40	86,0	61,5	45,5	34,0	26,5	21,0	17,0	14,0	11,0	8,5
		1,8	4,95	110,0	78,0	57,5	43,0	33,5	26,5	21,5	17,5	14,0	12,0
		2,0	5,50	135,0	96,0	71,0	53,0	41,5	32,5	26,5	21,5	17,5	15,0
		2,2	6,05	160,0	115,0	86,0	64,0	50,0	39,0	32,0	26,0	21,0	18,0
		2,4	6,60	195,0	140,0	100,0	76,5	59,5	47,0	38,0	31,0	25,0	21,0
		2,6	7,25	225,0	160,0	120,0	90,0	70,0	55,0	45,0	36,5	29,5	25,0
		2,8	7,70	260,0	190,0	140,0	105,0	81,0	64,0	52,0	42,5	34,5	29,0
		3,0	8,30	300,0	215,0	160,0	120,0	93,0	73,0	60,0	49,0	39,5	33,0
				m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
				3,00	3,50	4,24	4,94	6,13	7,25	8,50	9,93	11,40	13,00
f_0				4,23	4,95	6,00	7,00	8,65	10,20	12,00	14,00	16,10	18,40
					4,80	**5,60**	**6,50**	**8,00**	**9,40**	**11,00**	**12,80**	**14,70**	**16,80**
				2,04	2,76	3,60	4,45	5,65	6,80	8,10	9,50	11,00	12,70
f_1				2,46	3,55	4,74	5,95	7,65	9,25	11,20	13,20	15,30	17,60
					3,40	**4,14**	**5,45**	**7,00**	**8,45**	**10,20**	**12,00**	**13,90**	**16,00**
				3,72	4,10	4,75	5,45	6,55	7,60	8,85	10,20	11,60	13,30
f_2				5,50	6,04	7,03	7,90	9,50	10,90	12,70	14,70	16,80	18,90
					5,89	**6,43**	**7,40**	**8,85**	**10,10**	**11,70**	**13,50**	**15,40**	**17,30**
$4(\lambda' - \lambda)$				0,40	0,47	0,60	0,72	1,00	1,28	1,61	2,02	2,49	3,02
					0,42	**0,51**	**0,60**	**0,82**	**1,04**	**1,30**	**1,62**	**2.00**	**2,24**

Ainsi que nous l'avons dit à l'occasion du Tableau n° 31, les câbles établis en prenant pour limite supérieure des flèches les chiffres en gros caractères des Tableaux n° 31 et n° 33 sont des câbles équivalents lors de leur installation, qui restent équivalents malgré l'allongement produit par l'usage et dont le coefficient de fonctionnement varie seulement du simple au double ; au contraire, les câbles établis en prenant pour limites supérieures des flèches les chiffres en petits caractères sont des câbles équivalents au moment de l'installation, mais qui cessent de l'être ensuite, et qui sont assujettis simplement à ce que le rapport $\frac{m'}{m}$ soit égal à $\sqrt{2}$ ou, si l'on veut, à ce que leur coefficient de fonctionnement ne puisse varier par l'allongement permanent au delà du rapport de 1 à 2,8.

Il ne nous reste plus, pour terminer l'étude des transmissions télédynamiques, qu'à appliquer la théorie précédemment exposée au cas où la portée est trop grande pour qu'on puisse employer un câble unique soutenu simplement par les deux poulies extrêmes.

On conçoit, en effet, que lorsque la distance à laquelle la force doit être transmise est très considérable et lorsque les poulies extrêmes ne peuvent être placées à une grande hauteur au-dessus du sol, il est impossible d'installer un câble unique, en raison de la flèche qui se produirait. On peut cependant établir encore, dans ce cas, une transmission télédynamique, grâce à deux procédés que nous allons étudier.

Le premier est celui des câbles à relais successifs ([1]); le deuxième est celui des câbles avec galets de support.

X. — CABLES A RELAIS SUCCESSIFS.

Dans ce système, les poulies intermédiaires aux deux poulies extrêmes portent une double gorge, afin de permettre l'enroulement des deux câbles consécutifs qui viennent passer sur chacune d'elles. On a soin, autant que

([1]) C'est l'ingénieur Ziegler qui a le premier appliqué en grand cette disposition. Dans l'installation d'Oberursel à Francfort-sur-le-Mein, il a pu de cette manière transmettre 100 chevaux à 1^{km} de distance.

possible, de placer ces poulies intermédiaires à une même distance les unes des autres, afin qu'un seul câble de réserve puisse remplacer l'un quelconque des câbles si une rupture se produisait.

Proposons-nous, pour une pareille transmission, de rechercher, ainsi que nous l'avons fait pour les câbles à portée unique, quelle est la quantité qui mesure la régularité du mouvement.

Nous savons que le coefficient de régularité $\mathfrak{R}$ d'une transmission est le rapport de la tension supplémentaire τ, résultant d'un déplacement relatif α des poulies extrêmes, à ce déplacement. On a donc

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{\alpha}{\tau},$$

et, en appliquant cette formule à chacun des câbles successifs, on en déduit :

Pour le premier .... $\frac{1}{\mathfrak{R}_{(1)}} = \frac{\alpha_{(1)}}{\tau_{(2)}}$

Pour le deuxième .... $\frac{1}{\mathfrak{R}_{(2)}} = \frac{\alpha_{(2)}}{\tau_{(2)}}$

....

Pour le $n^{\text{ième}}$ .... $\frac{1}{\mathfrak{R}_{(n)}} = \frac{\alpha_{(n)}}{\tau_{(n)}}$

Mais le déplacement relatif α des poulies extrêmes est évidemment égal à la somme des déplacements $\alpha_{(1)}\alpha_{(2)}, \ldots, \alpha_{(n)}$; en effet, la deuxième poulie ayant l'avance $\alpha_{(1)}$ sur la première, la troisième par cela seul acquiert l'avance $\alpha_{(1)}$ sur cette première, ainsi que toutes les poulies suivantes. Et comme elle a sur la deuxième, par le fait de la transmission qui les réunit, une avance $\alpha_{(2)}$, elle a, en total, sur la première, l'avance $\alpha_{(1)} + \alpha_{(2)}$. Ce raisonnement, poursuivi d'une poulie à l'autre, montre que la dernière poulie de la transmission a sur la première l'avance

$$\alpha = \alpha_{(1)} + \alpha_{(2)} + \ldots + \alpha_{(n)}.$$

D'autre part, si l'on néglige la masse des poulies et le frottement de leurs tourillons, les tensions supplémentaires sucessives $\tau_{(1)}, \tau_{(2)}, \ldots, \tau_{(n)}$

sont toutes égales entre elles; on a donc

$$\tau = \tau_{(1)} = \tau_{(2)} \ldots = \tau_{(n)}.$$

On déduit de là

$$\frac{\alpha}{\tau} = \frac{\alpha_{(1)} + \alpha_{(2)} + \ldots + \alpha_{(n)}}{\tau} = \frac{\alpha_{(1)}}{\tau_{(1)}} + \frac{\alpha_{(2)}}{\tau_{(2)}} + \ldots + \frac{\alpha_{(n)}}{\tau_{(n)}},$$

ou

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{\mathfrak{R}_{(1)}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{(2)}} + \ldots + \frac{1}{\mathfrak{R}_{(n)}}.$$

Le théorème auquel on est ainsi conduit peut s'énoncer comme il suit :

Dans une transmission par câbles successifs, l'inverse du coefficient de régularité est égal, si l'on néglige la masse des poulies, à la somme des inverses des coefficients de régularité de chacun de câbles.

Remarquons maintenant que la force Θ transmise par tous les câbles est la même, puisqu'on néglige la masse des poulies, et qu'il n'y a pas de dérivations de force; dès lors on a entre les coefficients de fonctionnement, représentés comme on sait par $\frac{\mathfrak{R}}{\Theta}$, la relation ([1])

$$\frac{1}{\mathfrak{F}} = \frac{1}{\mathfrak{F}_{(1)}} + \frac{1}{\mathfrak{F}_{(2)}} + \ldots + \frac{1}{\mathfrak{F}_{(n)}}.$$

Il est bien clair qu'en fait la masse des poulies est loin d'être négligeable et

---

([1]) La formule qui suit montre que le coefficient de fonctionnement d'une transmission par câbles successifs est toujours inférieur à celui de chacun des câbles, et va en diminuant à mesure que le nombre de ces câbles augmente. Ainsi, en supposant que pour les diverses transmissions partielles le coefficient de fonctionnement ait la même valeur $\mathfrak{F}_1$, on a

$$\frac{1}{\mathfrak{F}} = \frac{n}{\mathfrak{F}_1},$$

ce qui montre qu'une transmission formée de n câbles de même fonctionnement a un coefficient n fois moindre que celui de chacun des câbles.

Cette conclusion, qui s'applique identiquement au coefficient de régularité, explique pourquoi les transmissions par câbles successifs donnent une régularité de mouvement beaucoup moins grande, ou, si l'on veut, un mouvement moins dur, moins saccadé que chacune des transmissions partielles qui les composent. C'est cette idée que nous exprimons un peu plus loin dans le texte en parlant de la plus grande souplesse des transmissions successives.

que, par suite de leur grande vitesse, ces poulies constituent, au contraire, des volants puissants, mais on a négligé cette masse afin d'arriver à un résultat simple qui montre de quelle manière il faut étudier une transmission par relais successifs dans le cas où la régularité du mouvement doit être considérée d'une façon spéciale.

Dans la plupart des cas, on pourra se borner à calculer chaque câble comme s'il était seul, les poulies de relais formant d'ordinaire des volants suffisants pour corriger les effets résultant de la plus grande souplesse de la transmission et assurer au mouvement une régularité suffisante.

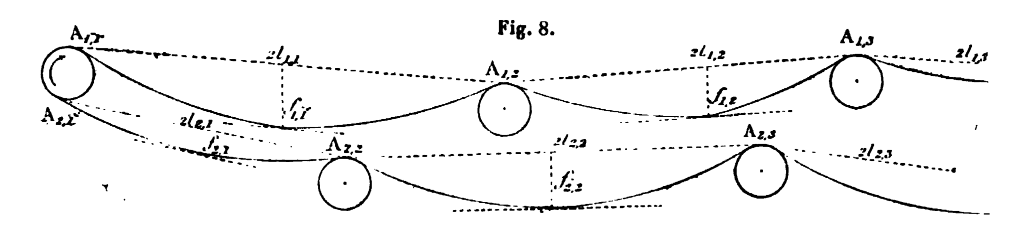
On conçoit aussi qu'il sera généralement permis, dans le calcul de la transmission, de considérer chaque câble comme transmettant la même force.

Les règles que nous avons données pour les câbles uniques seront donc appliquées successivement à chacun des câbles partiels dont on aura déterminé *a priori* la portée, et ce qui précède suffit pour faire comprendre comment devra être dirigé le calcul d'une transmission par câbles successifs.

XI. — Cables avec galets de support.

Lorsqu'on adopte cette disposition, on est d'ordinaire conduit, au point de vue de la plus grande simplicité de l'installation, à disposer les

Fig. 8.



galets de support de chaque brin par groupes de deux, les uns au-dessous des autres ([1]). Cependant, comme il n'en est pas toujours ainsi, il con-

([1]) On a essayé à plusieurs reprises de juxtaposer ces galets de support; mais, ainsi que le fait remarquer M. Reuleaux (*le Constructeur*, 2e édition française, § 238, p. 615), cette disposition est très défectueuse. Le câble s'use très vite en frottant contre les bords des poulies, et il saute très facilement.

vient, pour traiter le cas général, de laisser entièrement indéterminées les distances successives des galets des deux brins. Ces distances seront désignées par $2l$ (*fig.* 8) et la lettre l recevra deux indices, le premier désignant le brin, et le deuxième le rang occupé par la portion de câble que l'on considère. La même notation sera d'ailleurs employée pour les flèches f, comptées toujours sur la verticale passant par le milieu de la corde.

D'après la démonstration que nous avons donnée au § XVI de la deuxième Partie, la tension du câble, diminuée de la tension centrifuge en l'un des points de contact avec un galet, est représentée par l'expression $\frac{pl^2}{2f}$, en désignant par l et f la portée et la flèche de la portion considérée. Mais les deux tensions exercées sur un même galet par deux portions consécutives du câble sont égales, si l'on néglige le frottement des tourillons sur leurs coussinets; on en déduit

$$\frac{f_{1,1}}{l_{1,1}^2} = \frac{f_{1,2}}{l_{1,2}^2} = \frac{f_{1,3}}{l_{1,3}^2} = \ldots, \tag{1}$$

$$\frac{f_{2,1}}{l_{2,1}^2} = \frac{f_{2,2}}{l_{2,2}^2} = \frac{f_{2,3}}{l_{2,3}^2} = \ldots. \tag{2}$$

L'excès de la longueur 2Λ de chaque brin sur la longueur $2L$ de la ligne polygonale formée par les cordes des arcs successifs est facile à obtenir. On a, en effet, d'après la formule (27) du § I de la deuxième Partie, pour chaque portion,

$$2\lambda_{1,1} - 2l_{1,1} = \frac{4}{3}\frac{f_{1,1}^2}{l_{1,1}},$$

$$2\lambda_{1,2} - 2l_{1,2} = \frac{4}{3}\frac{f_{1,2}^2}{l_{1,2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$2\lambda_{2,1} - 2l_{2,1} = \frac{4}{3}\frac{f_{2,1}^2}{l_{2,1}},$$

$$2\lambda_{2,2} - 2l_{2,2} = \frac{4}{3}\frac{f_{2,2}^2}{l_{2,2}},$$

et l'on en conclut

(3) $$2(\Lambda_1 - L_1) = \frac{4}{3}\left(\frac{f_{1.1}^2}{l_{1,1}} + \frac{f_{1.2}^2}{l_{1,2}} + \frac{f_{1.3}^2}{l_{1,3}} + \ldots\right),$$

(4) $$2(\Lambda_2 - L_2) = \frac{4}{3}\left(\frac{f_{2.1}^2}{l_{2,1}} + \frac{f_{2.2}^2}{l_{2,2}} + \frac{f_{2.3}^2}{l_{2,3}} + \ldots\right).$$

Les équations (1) et (2) étant évidemment applicables à l'état de repos pour lequel la tension du brin mené et celle du brin menant sont égales, on a, en représentant par m la flèche relative au repos de chaque portion,

(5) $$\frac{m_{1,1}}{l_{1,1}} = \frac{m_{1,2}}{l_{1,2}} = \ldots = \frac{m_{2,1}}{l_{2,1}} = \frac{m_{2,2}}{l_{2,2}}.$$

Calculons maintenant le coefficient qui mesure la régularité et, pour cela, considérons d'abord un seul brin.

Le déplacement relatif de ses extrémités est évidemment la somme des déplacements relatifs des points successifs où il touche les poulies extrêmes et les galets intermédiaires. On a donc

$$\alpha_1 = \alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \ldots.$$

Quant aux tensions supplémentaires dues à ces déplacements, elles seront toutes égales entre elles évidemment, si l'on néglige la masse des galets et le frottement de leurs tourillons. On en conclut

$$\tau_1 = \tau_{1,1} + \tau_{1,2} + \ldots,$$

et, par suite,

$$\frac{\alpha_1}{\tau_1} = \frac{\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \ldots}{\tau_1} = \frac{\alpha_{1,1}}{\tau_{1,1}} + \frac{\alpha_{1,2}}{\tau_{1,2}} + \ldots.$$

Mais, d'après les formules établies au § XIV de la première Partie, on a

$$\frac{\alpha_{1,1}}{\tau_{1,1}} = \frac{16}{3}\frac{f_{1,1}^3}{pl_{1,1}^3},$$
$$\frac{\alpha_{1,2}}{\tau_{1,2}} = \frac{16}{3}\frac{f_{1,2}^3}{pl_{1,2}^3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on en déduit

$$\frac{\tau_1}{\alpha_1} = \frac{3}{16}p\frac{1}{\frac{f_{1,1}^3}{l_{1,1}^3} + \frac{f_{1,2}^3}{l_{1,2}^3} + \ldots};$$

on aura de même pour l'autre brin

$$\frac{\tau_2}{\alpha_2} = \frac{3}{16} p \frac{1}{\frac{f_{2,1}^3}{l_{2,1}^3} + \frac{f_{2,2}^3}{l_{2,2}^3} + \ldots},$$

et l'on en conclura pour le câble complet, puisque α_1 est évidemment égal à α_2 et en représentant par τ la résultante des tensions supplémentaires sur les deux brins,

$$\mathfrak{R} = \frac{\tau}{\alpha} = \frac{3}{16} p \left(\frac{1}{\frac{f_{1,1}^3}{l_{1,1}^3} + \frac{f_{1,2}^3}{l_{1,2}^3} + \ldots} + \frac{1}{\frac{f_{2,1}^3}{l_{2,1}^3} + \frac{f_{2,2}^3}{l_{2,2}^3} + \ldots} \right). \tag{6}$$

Telle est l'expression du coefficient de régularité; elle peut s'écrire

$$\mathfrak{R} = \frac{3}{2} \frac{1}{p^2} \left[\frac{\left(\Theta_1 - \frac{pV^2}{g}\right)^3}{l_{1,1}^3 + l_{1,2}^3 + \ldots} + \frac{\left(\Theta_2 - \frac{pV^2}{g}\right)^3}{l_{2,1}^3 + l_{2,2}^3 + \ldots} \right], \tag{7}$$

car, d'après les relations

$$2\left(\Theta_1 - \frac{pV^2}{g}\right) = \frac{pl_{1,1}^2}{f_{1,1}} = \frac{pl_{1,2}^2}{f_{1,2}} = \ldots,$$

$$2\left(\Theta_2 - \frac{pV^2}{g}\right) = \frac{pl_{2,1}^2}{f_{2,1}} = \frac{pl_{2,2}^2}{f_{2,2}} = \ldots,$$

on a

$$\frac{f_{1,1}^3}{l_{1,1}^3} = \frac{p^3}{8} \frac{l_{1,1}^3}{\left(\Theta_1 - \frac{pV^2}{g}\right)^3},$$

$$\frac{f_{1,2}^3}{l_{1,2}^3} = \frac{p^3}{8} \frac{l_{1,2}^3}{\left(\Theta_1 - \frac{pV^2}{g}\right)^3},$$

. . . . ,

$$\frac{f_{2,1}^3}{l_{2,1}^3} = \frac{p^3}{8} \frac{l_{2,1}^3}{\left(\Theta_2 - \frac{pV^2}{g}\right)^3},$$

$$\frac{f_{2,2}^3}{l_{2}^3} = \frac{p^3}{8} \frac{l_{2,2}^3}{\left(\Theta_2 - \frac{pV^2}{g}\right)^3}.$$

. . . .

Dans le cas des vitesses ordinaires, l'expression (7) peut être réduite à

$$(8) \qquad \mathfrak{A} = \frac{3}{2}\frac{1}{p^2}\left[\frac{\Theta_1^3}{l_{1,1}^3 + l_{1,2}^3 + \ldots} + \frac{\Theta_2^3}{l_{2,1}^3 + l_{2,2}^3 + \ldots}\right].$$

Pour les câbles d'une seule portée, nous avons reconnu que le raccourcissement maximum à craindre sous l'influence des variations atmosphériques était égal à $\frac{1}{1250}$ de sa longueur; nous en avons conclu que, pour éviter des variations de tension trop fortes, il fallait adopter $\frac{1}{40}$ comme minimum de la flèche relative au repos.

Il est bien clair que l'action du milieu ambiant reste la même dans le cas des câbles soutenus, et qu'il y a lieu de considérer encore $\frac{1}{1250}$ comme le maximum du raccourcissement possible.

Nous allons déduire de là, en suivant une marche identique à celle que nous avons adoptée pour les câbles à portée unique, le minimum à admettre pour la flèche relative au repos de chaque portion du câble si l'on veut éviter la production d'efforts dangereux sous l'action des variations atmosphériques. En d'autres termes, nous allons chercher ce que devient la règle du $\frac{1}{40}$ pour les câbles à galets de support.

Reprenons pour cela les équations

$$(9) \qquad \Theta_1 - \frac{p\mathrm{V}^2}{g} = \frac{pl_{1,1}^2}{2f_{1,1}} = \frac{pl_{1,2}^2}{2f_{1,2}} = \ldots,$$

$$(10) \qquad \Theta_2 - \frac{p\mathrm{V}^2}{g} = \frac{pl_{2,1}^2}{2f_{2,1}} = \frac{pl_{2,2}^2}{2f_{2,2}} = \ldots.$$

On en déduit

$$(11) \qquad \Theta_1 - \frac{p\mathrm{V}^2}{g} = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{l_{1,1}^3 + l_{1,2}^3 + \ldots}{\frac{f_{1,1}^2}{l_{1,1}} + \frac{f_{1,2}^2}{l_{1,2}} + \ldots}},$$

$$(12) \qquad \Theta_2 - \frac{p\mathrm{V}^2}{g} = \frac{p}{2}\sqrt{\frac{l_{2,1}^3 + l_{2,2}^3 + \ldots}{\frac{f_{2,1}^2}{l_{2,1}} + \frac{f_{2,2}^2}{l_{2,2}} + \ldots}},$$

et, comme l'on a

$$(3) \qquad (\Lambda_1 - \mathrm{L}_1) = \frac{2}{3}\left(\frac{f_{1,1}^2}{l_{1,1}} + \frac{f_{1,2}^2}{l_{1,2}} + \ldots\right),$$

$$(4) \qquad (\Lambda_2 - \mathrm{L}_2) = \frac{2}{3}\left(\frac{f_{2,1}^2}{l_{2,1}} + \frac{f_{2,2}^2}{l_{2,2}} + \ldots\right),$$

on en conclut

$$(13) \qquad \Theta_1 - \frac{pV^2}{g} = p\frac{(\Sigma l_{1,i}^3)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}(\Lambda_1 - L_1)^{\frac{1}{2}}},$$

$$(14) \qquad \Theta_2 - \frac{pV^2}{g} = p\frac{(\Sigma l_{2,i}^3)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}(\Lambda_2 - L_2)^{\frac{1}{2}}},$$

et, par suite,

$$(15) \qquad d\left(\Theta_1 - \frac{pV^2}{g}\right) = -\frac{p}{2\sqrt{6}}(\Sigma l_{1,i}^3)^{\frac{1}{2}}\frac{d(\Lambda_1 - L_1)}{(\Lambda_1 - L_1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(16) \qquad d\left(\Theta_2 - \frac{pV^2}{g}\right) = -\frac{p}{2\sqrt{6}}(\Sigma l_{2,i}^3)^{\frac{1}{2}}\frac{d(\Lambda_2 - L_2)}{(\Lambda_2 - L_2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais, le travail transmis restant le même, on a

$$\Theta_1 - \Theta_2 = \text{const.};$$

il en résulte

$$d\Theta_1 = d\Theta_2,$$

ou encore, d'après les deux équations précédentes,

$$(17) \qquad (\Sigma l_{1,i}^3)^{\frac{1}{2}}\frac{d(\Lambda_1 - L_1)}{(\Lambda_1 - L_1)^{\frac{3}{2}}} = (\Sigma l_{2,i}^3)^{\frac{1}{2}}\frac{d(\Lambda_2 - L_2)}{(\Lambda_2 - L_2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Désignons par Λ le quart de la longueur totale des deux brins du câble, et par L le quart du périmètre du polygone des points de contact, nous aurons

$$2\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2,$$
$$2L = L_1 + L_2,$$

et l'équation précédente pourra s'écrire

$$(18) \qquad \frac{d(\Lambda_1 - L_1)}{\frac{(\Lambda_1 - L_1)^{\frac{3}{2}}}{(\Sigma l_{1,i}^3)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{d(\Lambda_2 - L_2)}{\frac{(\Lambda_2 - L_2)^{\frac{3}{2}}}{(\Sigma l_{2,i}^3)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{2d(\Lambda - L)}{\frac{(\Lambda_1 - L_1)^{\frac{3}{2}}}{(\Sigma l_{1,i}^3)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(\Lambda_2 - L_2)^{\frac{3}{2}}}{(\Sigma l_{2,i}^3)^{\frac{1}{2}}}}.$$

Représentons par k le rapport du glissement

$$\frac{\Theta_1 - \frac{pV^2}{g}}{\Theta_2 - \frac{pV^2}{g}} = k, \tag{19}$$

nous aurons, par les équations (7) et (8),

$$\frac{\Lambda_1 - L_1}{\Sigma l^3_{1,i}} = \frac{\Lambda_2 - L_2}{k^2 \Sigma l^3_{2,i}} = \frac{2(\Lambda - L)}{\Sigma l^3_{1,i} + k^2 \Sigma l^3_{2,i}}; \tag{20}$$

mais, d'autre part, on a, en divisant membre à membre les équations (9) et (7),

$$\frac{d\left(\Theta_1 - \frac{pV^2}{g}\right)}{\Theta_1 - \frac{pV^2}{g}} = -\frac{1}{2} \frac{d(\Lambda_1 - L_1)}{\Lambda_1 - L_1},$$

et, en déduisant $\Lambda_1 - L_1$ et $d(\Lambda_1 - L_1)$ des équations (18) et (20),

$$\frac{d\left(\Theta_1 - \frac{pV^2}{g}\right)}{\Theta_1 - \frac{pV^2}{g}} = -\frac{1}{2} \frac{d(\Lambda - L)}{\Lambda - L} \frac{\Sigma l^3_{1,i} + k^2 \Sigma l^3_{2,i}}{\Sigma l^3_{1,i} + k^3 \Sigma l^3_{2,i}},$$

équation qui montre que les variations relatives de tension sont proportionnelles aux variations relatives de longueur.

Mais, k étant plus grand que l'unité, on peut poser

$$\frac{d\left(\Theta_1 - \frac{pV^2}{g}\right)}{\Theta_1 - \frac{pV^2}{g}} < -\frac{1}{2} \frac{d(\Lambda - L)}{\Lambda - L}. \tag{21}$$

Si donc on remplace $d(\Lambda - L)$ par sa valeur maximum $\frac{L}{1250}$ (¹),

---

(¹) On a vu que le raccourcissement maximum d'un câble à portée unique était $\frac{2l}{1250}$ pour chaque brin. Dans le cas que nous étudions, le raccourcissement maximum sera donc

$$\frac{2l_{1,1} + 2l_{1,2} + \ldots + 2l_{2,1} + 2l_{2,2} + \ldots}{1250} = \frac{4L}{1250} = 4d(\Lambda - L)$$

on a

$$\frac{d\left(\Theta_1 - \frac{pV^2}{g}\right)}{\Theta_1 - \frac{pV^2}{g}} < -\frac{1}{2 \times 1250} \frac{L}{\Lambda - L},$$

et si l'on veut que le maximum de la variation de la tension ne dépasse pas un quart de cette tension, il faut poser

$$\frac{1}{2 \times 1250} \frac{L}{\Lambda - L} < \frac{1}{4},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\Lambda - L}{L} < \frac{2}{1250};$$

nous admettrons comme règle générale

(22) $$\frac{\Lambda - L}{L} > \frac{1}{600}.$$

Cette condition peut se mettre sous une autre forme.

On a, en effet,

$$\frac{\Lambda - L}{L} = \frac{1}{2} \sum \frac{\lambda - l}{l} \frac{l}{L},$$

le signe Σ s'appliquant aux deux brins du câble considéré, d'ailleurs, à l'état de repos ou de mouvement.

Mais l'on a, pour chaque portion [(27)],

$$\lambda - l = \frac{8}{3} m^2 l;$$

on en déduit

$$\frac{\Lambda - L}{L} = \sum \frac{8}{3} m^2 \frac{l}{2L},$$

et la condition trouvée devient

$$\frac{8}{3} \sum m^2 \frac{l}{2L} > \frac{1}{600},$$

ou encore

$$\left(\sum m^2 \frac{l}{2L}\right)^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{40}.$$

Si donc on appelle *flèche relative moyenne* l'expression $\sqrt{\sum m^2 \frac{l}{2L}}$, on peut dire que, pour les câbles soutenus, la flèche relative moyenne doit être supérieure à $\frac{1}{40}$ (¹).

Il est facile de déduire de ce qui précède la limite inférieure à admettre pour les flèches au repos de chaque portion du câble. On a, en effet,

$$\Lambda - L = \frac{1}{3}\left(\frac{f_{1,1}^2}{l_{1,1}} + \frac{f_{1,2}^2}{l_{1,2}} + \ldots + \frac{f_{2,1}^2}{l_{2,1}} + \frac{f_{2,2}^2}{l_{2,2}} + \ldots\right),$$

$f_{1,1}, f_{1,2}, \ldots, f_{2,1}, f_{2,2}, \ldots$ étant les flèches au repos.

Mais l'on a, d'autre part,

$$2L = l_{1,1} + l_{1,2} + \ldots + l_{2,1} + l_{2,2} + \ldots;$$

la condition (16) devient dès lors

$$\frac{f_{1,1}^2}{l_{1,1}} + \frac{f_{1,2}^2}{l_{1,2}} + \ldots + \frac{f_{2,1}^2}{l_{2,1}} + \frac{f_{2,2}^2}{l_{2,2}} + \ldots > \frac{2}{3}\,\frac{l_{1,1} + l_{1,2} + \ldots + l_{2,1} + l_{2,2} + \ldots}{600},$$

et, si l'on tient compte des relations

$$\frac{f_{1,1}}{l_{1,1}^2} = \frac{f_{1,2}}{l_{1,2}^2} = \ldots = \frac{f_{2,1}}{l_{2,1}^2} = \frac{f_{2,2}}{l_{2,2}^2} = \ldots = \frac{\sqrt{\frac{f_{1,1}^2}{l_{1,1}} + \frac{f_{1,2}^2}{l_{1,2}} + \ldots + \frac{f_{2,1}^2}{l_{2,1}} + \frac{f_{2,2}^2}{l_{2,2}} + \ldots}}{\sqrt{l_{1,1}^3 + l_{1,2}^3 + \ldots + l_{2,1}^3 + l_{2,2}^3 + \ldots}},$$

on en conclut

$$\frac{f_{1,1}}{l_{1,1}^2} = \frac{f_{1,2}}{l_{1,2}^2} = \ldots = \frac{f_{2,1}}{l_{2,1}^2} = \frac{f_{2,2}}{l_{2,2}^2} = \ldots > \frac{1}{20}\sqrt{\frac{l_{1,1} + l_{1,2} + \ldots + l_{2,1} + l_{2,2} + \ldots}{l_{1,1}^3 + l_{1,2}^3 + \ldots + l_{2,1}^3 + l_{2,2}^3 + \ldots}},$$

relations qui peuvent s'écrire

$$\frac{m_{1,1}}{l_{1,1}} = \frac{m_{1,2}}{l_{1,2}} = \ldots = \frac{m_{2,1}}{l_{2,1}} = \frac{m_{2,2}}{l_{2,2}} = \ldots > \frac{1}{40}\sqrt{\frac{l_{1,1} + l_{1,2} + \ldots + l_{2,1} + l_{2,2} + \ldots}{l_{1,1}^3 + l_{1,2}^3 + \ldots + l_{2,1}^3 + l_{2,2}^3 + \ldots}},$$

et d'où l'on déduit, pour chaque portion du câble,

$$m > \frac{l}{40}\frac{(\Sigma l)^{\frac{1}{2}}}{(\Sigma l^3)^{\frac{1}{2}}}.$$

(¹) On voit que, dans le cas d'un câble à portée unique, on retombe bien sur la règle du $\frac{1}{40}$ que nous avons énoncée.

On voit que, dans le cas d'un câble à portée unique, ou dans le cas d'un câble à galets de support dans lequel toutes les portées successives sont égales entre elles, les formules précédentes conduisent, pour le minimum de la flèche relative au repos, au $\frac{1}{40}$ de la portée.

Il est nécessaire que nous fassions ici une remarque au sujet des règles que nous venons d'établir pour éviter la production d'efforts dangereux sous l'influence des raccourcissements dus aux variations atmosphériques.

L'effet d'un raccourcissement du câble sur la tension varie suivant la forme du polygone inscrit dans le câble et formé par les points de contact successifs. Si les deux portions $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, ... et $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, ... (*fig.* 8) de ce polygone, correspondant, l'une au brin moteur, l'autre au brin conduit, tournent leur convexité vers le haut en tous leurs sommets, le câble ne peut évidemment pas quitter ses galets de soutien par cela seul qu'il se raccourcit et, s'il est trop tendu, c'est-à-dire si la flèche relative moyenne au repos $\sqrt{\frac{1}{2}\sum m^2 \frac{l}{L}}$ est plus petite que $\frac{1}{40}$, on doit redouter des efforts dangereux.

Si, au contraire, les polygones dont il s'agit tournent dans toute leur étendue, ou dans une portion seulement de cette étendue, leur convexité vers le bas, le câble, en se raccourcissant, quitte certains galets et l'on peut ne pas voir se produire d'efforts dangereux, alors même que les flèches relatives au repos sont plus petites que celles résultant de la règle que nous venons de rappeler.

Mais le fait de quitter les galets, en changeant complètement les conditions du mouvement, constitue un inconvénient d'une telle importance qu'il convient de l'éviter presque au même titre que la chute du câble ou sa rupture. Il faut donc s'assujettir dans tous les cas à ce que les variations accidentelles de longueur du câble ne puissent pas modifier d'une façon exagérée les conditions mêmes de fonctionnement, et, pour cela, il faut adopter comme limites supérieures des flèches relatives au repos, pour toutes les transmissions exposées aux actions atmosphériques, les valeurs que nous avons obtenues.

Il est d'ailleurs facile de trouver la règle pratique à admettre pour que

le câble ne puisse quitter ses galets; il suffit pour cela d'exprimer que la pression qu'il exerce sur eux ne devient jamais négative. Or il est clair que cette pression dépend de la grandeur des oscillations du câble, grandeur qui varie avec les efforts qu'il subit. On conçoit dès lors qu'une règle mathématique puisse difficilement être établie. Cependant, pour les câbles ordinaires, il résulte de l'expérience que l'amplitude des oscillations aux points de contact avec les poulies, c'est-à-dire les variations de l'inclinaison φ du câble sur la tangente commune à deux galets consécutifs, peut atteindre $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{8}$, en valeur absolue, de part et d'autre de la position moyenne du brin.

Or, au moment où le câble va quitter un galet, les deux portions d'un brin situées de part et d'autre du point de contact avec ce galet sont en ligne droite. Pour que ce fait ne puisse se produire, il suffit évidemment que l'angle des deux portions dont il s'agit soit supérieur, pour la position moyenne du brin, à $2 \times \frac{1}{10}$ ou $2 \times \frac{1}{8}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{4}$. Mais il sera prudent de ne pas atteindre cette limite (¹).

En résumé, la règle que nous avons donnée pour la détermination des flèches relatives au repos de chacune des portions d'un câble soutenu exprime que les conditions de fonctionnement ne seront pas trop altérées par les variations accidentelles de longueur du câble; en un mot, elle correspond exactement à la règle de $\frac{1}{40}$ dont elle est la généralisation. Mais elle ne suffit pas à assurer l'adhérence du câble sur les galets à cause des oscillations auxquelles sont soumis les câbles en marche et il faut, pour assurer cette adhérence, une nouvelle règle entièrement différente, laquelle disparaît évidemment dans le cas des câbles à portée unique, et qui consiste à donner à l'angle des deux portions de brin situées de part et d'autre du point de contact avec le galet une valeur suffisante.

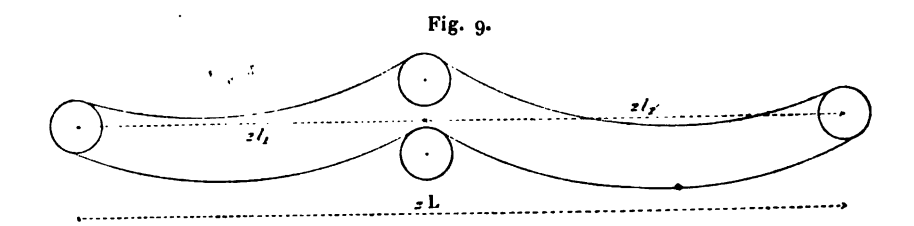
(¹) Il a été admis que les galets de support ne faisaient pas volants; cependant, il est clair qu'ils remplissent ce rôle dans une certaine mesure si le câble les embrasse sur une partie suffisante de leur circonférence.

Dans ce cas, ils se comportent à peu près comme des poulies de relais à double gorge, mais il faut remarquer que leur poids est beaucoup plus faible.

XII. — Comparaison entre la transmission par cables successifs et la transmission par cable unique avec galets de support.

Pour faciliter cette étude, nous examinerons le cas particulier d'un câble soutenu par un seul couple de galets placés l'un au-dessous de l'autre.

Fig. 9.



Avec les notations indiquées dans la figure ci-dessus, l'expression (7) du coefficient de régularité, donnée au paragraphe précédent, devient

$$\mathfrak{R} = \frac{3}{2}\frac{1}{p^2}\frac{\Theta_1^3 + \Theta_2^3}{l_1^3 + l_2^3}, \qquad (8)$$

et si l'on pose

$$2l_1 = L(1 + x),$$
$$2l_2 = L(1 - x),$$

on a

$$\mathfrak{R} = 6\frac{\Theta_1^3 + \Theta_2^3}{p^2 L^3}\frac{1}{1 + 3x^2}.$$

Si donc on considère un même câble transmettant toujours le même effort sous le même rapport des tensions, ce qui revient à considérer p, Θ_1 et Θ_2 comme invariables, le coefficient $\mathfrak{R}$ diminuera quand x augmentera, c'est-à-dire qu'il sera d'autant plus faible que les deux travées seront plus inégales.

Il sera maximum quand x sera nul, ce qui correspond au cas où les galets sont placés au milieu de la portée totale, et sa valeur sera alors

$$6\frac{\Theta_1^3 + \Theta_2^3}{p^2 L^3},$$

c'est-à-dire quatre fois ce qu'elle serait pour un câble à portée unique [1].

Ainsi donc, l'effort restant le même, ainsi que le rapport des tensions, il faudra employer un câble deux fois plus lourd, s'il doit être soutenu en son milieu, que s'il doit être d'une seule portée, pour avoir la même régularité dans les deux cas.

On voit aisément que les flèches relatives sont alors les mêmes pour le câble d'une seule portée, et pour les deux portions du câble soutenues en son milieu. En effet, pour le câble à une seule portée, on a, en négligeant la tension due à la force centrifuge,

$$\Theta_1 = \frac{pL^2}{2f_1}, \qquad \Theta_2 = \frac{pL^2}{2f_2},$$

et, pour le câble soutenu en son milieu,

$$\Theta_1 = \frac{(2p)\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2f_1'}, \qquad \Theta_2 = \frac{(2p)\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2f_2'};$$

il en résulte

$$f_1' = \frac{f_1}{2}, \qquad f_2' = \frac{f_2}{2}$$

---

(1) Dans un câble à portée unique, de portée 2 L, on a

[(22)] $$\mathfrak{R} = \tfrac{3}{16} pL^3 \left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2}\right);$$

mais, en négligeant, comme nous l'avons fait, l'action de la force centrifuge, on peut poser

[(8)] $$\Theta_1 = \frac{pL^2}{2f_1},$$

[(9)] $$\Theta_2 = \frac{pL^2}{2f_2};$$

on en déduit

$$\mathfrak{R} = \frac{3}{2}\,\frac{\Theta_1^2 + \Theta_2^2}{p^2 L^3},$$

ce que donne, d'ailleurs, la formule (8) pour l_2 égal à zéro.

et, par suite,

$$\frac{f'_1}{2l_1} = \frac{f_1}{2L},$$

$$\frac{f'_2}{2l_2} = \frac{f_2}{2L},$$

puisque l_1 et l_2 sont égaux à la moitié de L.

Voyons maintenant quelle eût été la régularité si, au lieu d'employer deux galets comme nous l'avons fait, nous avions pris une poulie de renvoi placée au milieu de la portée.

Les deux câbles successifs étant dans des conditions identiques, on déduit de la formule

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2},$$

lorsque $\mathfrak{R}_1$ est égal à $\mathfrak{R}_2$,

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{R}_1}{2};$$

mais l'on a

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{3}{2}\frac{1}{p^2}\frac{\Theta_1^3 + \Theta_2^3}{l^3};$$

si donc p, Θ_1 et Θ_2 restent les mêmes, on voit que $\mathfrak{R}_1$ est égal à huit fois la valeur qu'il aurait eue pour un câble unique de portée 2L, puisque l est la moitié de L. Dès lors $\mathfrak{R}$ est quatre fois plus grand pour deux câbles successifs égaux que pour un câble à portée unique, ce qui conduit à prendre un câble deux fois plus lourd dans le premier cas que dans le second, lorsqu'on veut obtenir la même régularité, à égalité de force transmise et de rapport des tensions.

Ce résultat montre que, au point de vue du poids du câble, il est indifférent d'employer un câble soutenu en son milieu ou deux câbles successifs égaux.

Et comme cette conséquence resterait évidemment vraie, quel que soit le nombre des travées, pourvu qu'elles fussent toutes égales, on peut énoncer le théorème suivant :

Les transmissions par galets de support également espacés et les trans-

missions par câbles successifs égaux s'équivalent, toutes choses égales d'ailleurs, au point de vue du poids du câble à employer.

Les avantages des galets de support sur les poulies de relais sont : 1° de conduire à des raccourcissements moins nombreux et plus faciles à exécuter ; 2° de diminuer un peu la force perdue par suite de la raideur du câble et du frottement des tourillons.

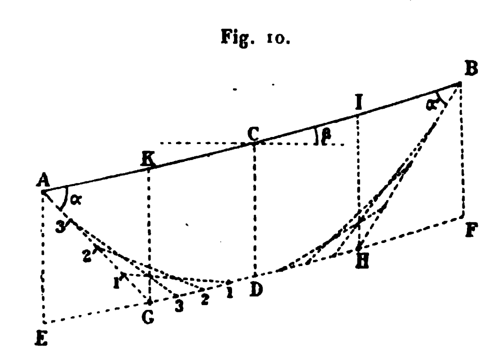
Mais ces avantages sont compensés par ceux que possèdent les câbles à poulies de relais : 1° de permettre à chaque station de prendre une partie de la force ; 2° d'exiger un seul câble partiel de rechange si toutes les travées sont égales ; 3° de donner lieu à une régularité plus grande, par suite de la rotation des poulies qui constituent des volants énergiques (1).

XIII. — Tracé des courbes de cables.

Le tracé des courbes de câbles s'obtient immédiatement lorsqu'on connaît la flèche (2), en utilisant une propriété connue de la parabole.

On prend le point C milieu de la corde AB (*fig.* 10), et l'on trace la ver-

Fig. 10.



ticale CD égale à la flèche ; par le point D, on mène EDF parallèle à AB et par les deux points A et B les verticales AE et BF. On joint ensuite le

(1) Ceci se rapporte, bien entendu, au cas de travées égales ou à peu près, car, si les travées sont très inégales, il peut y en avoir de très petites qui conduisent, si l'on emploie des câbles successifs, à des câbles beaucoup trop lourds. Une transmission par câble unique avec galets de support est alors seule possible.

(2) La flèche étant définie, pour les transmissions inclinées, comme il a été dit dans la première Partie.

point A au milieu G de ED et le point B au milieu H de DF; les deux droites AG et BH donnent les directions du brin au point où il quitte les poulies.

Ceci fait, on partage GD en n parties égales, ainsi que AG, et on joint ces points deux à deux, comme l'indique la figure; on fait de même pour DH et HB. On obtient ainsi une série de droites qui enveloppent la courbe de câble.

Nous ferons, au sujet des courbes de câbles, une remarque qui a une certaine importance dans les applications. En général, les poulies extrêmes de la transmission sont placées dans des bâtiments qu'elle réunit en passant par des embrasures. Il faut donner à ces embrasures des dimensions suffisantes pour que le câble ne frotte pas sur les appuis, ce qui constituerait une cause d'usure considérable.

On y arrive en remarquant que, si l'on considère un des brins du câble (figure précédente) et que l'on désigne par α et α' les inclinaisons de ce câble sur la corde à ses deux extrémités, on a (en représentant par β l'angle de cette corde avec l'horizontale), dans le triangle AGK,

$$\frac{f}{\sin\alpha} = \frac{l}{2\cos(\alpha-\beta)},$$

d'où l'on déduit

$$\tang\alpha = \frac{2f\cos\beta}{l-2f\sin\beta};$$

on obtient de même, par le triangle HIB,

$$\tang\alpha' = \frac{2f\cos\beta}{l+2f\sin\beta}.$$

et l'on peut admettre, en pratique, pour $\tang\alpha$ et $\tang\alpha'$, la valeur $\frac{2f}{l}$. Si l'on tient compte alors de ce que les oscillations du câble peuvent atteindre $\frac{1}{8}$ de part et d'autre de la position moyenne, on a tous les éléments nécessaires pour le tracé de l'embrasure.

XIV. — Remarques pratiques au sujet des transmissions par cables.

Les divers renseignements pratiques qu'il peut être utile d'avoir lorsqu'on emploie les transmissions télédynamiques ont été donnés par M. Reuleaux (*le Constructeur,* deuxième édition française). Nous nous contenterons donc ici d'indiquer les quelques modifications qu'il convient, dans les applications, d'apporter aux règles dont il s'agit.

Tout d'abord, en ce qui concerne les jantes de poulies simples, il est utile de faire la gorge un peu plus large que l'indique M. Reuleaux, afin d'éviter que le câble puisse frotter sur les parois, ce qui est très important, au point de vue de sa conservation.

En second lieu, pour les poulies doubles, il faut donner à la cloison du milieu une hauteur plus grande qu'aux faces extérieures des deux rainures, afin que l'un des câbles ne puisse passer dans la gorge de l'autre, ce qui constituerait un inconvénient des plus sérieux.

Nous ajouterons enfin, pour faciliter l'étude des projets, que l'on obtiendra le diamètre extérieur du câble par la formule

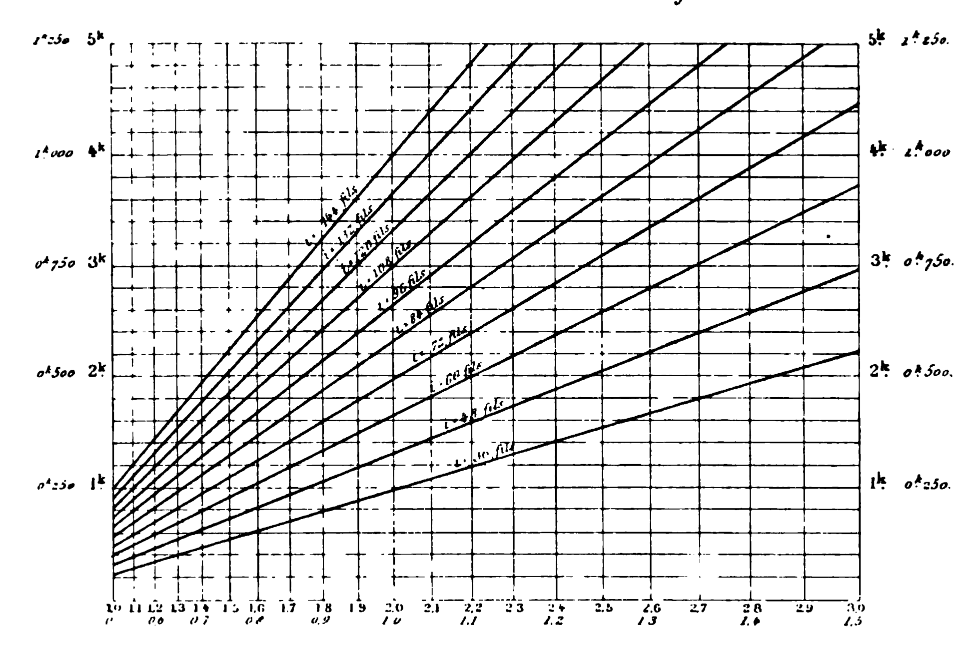
$$d = 20\sqrt{p},$$

d étant exprimé en millimètres, et p, poids du câble, par mètre courant, en kilogrammes.

Cette expression approximative de d sera très utile, car il faut connaître le diamètre du câble pour le tracé des gorges de poulies.

Le Tableau qui suit donne d'ailleurs la valeur de p, selon le nombre des fils et le diamètre de ces fils. Il a été établi en prenant, pour les abscisses qui représentent les diamètres, des longueurs telles que les courbes de poids soient des lignes droites.

Poids par mètre courant des câbles télédynamiques en fonction du diamètre δ et du nombre i des fils.



LÉGENDE. Le diamètre des fils est exprimé en millimètres.
Les poids en chiffres ordinaires correspondent aux diamètres en chiffres ordinaires.
» italiques » » italiques.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE GÉNÉRALE.

DEUXIÈME PARTIE.

CONSÉQUENCES PRATIQUES DE LA THÉORIE GÉNÉRALE.

TROISIÈME PARTIE.

RÈGLES D'ÉTABLISSEMENT DES TRANSMISSIONS TÉLÉDYNAMIQUES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

